Màster universitari en **Formació del Professorat d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat, Formació Professional i Ensenyament d'Idiomes**

Treball de fi de màster – Anexos publicables

Títol: **Dificultades de aprendizaje de la geometría por parte de alumnos del primer ciclo de la ESO.**

Cognoms: Roca Cuffí

Nom: Marta

Titulació: Màster en Formació del Professorat d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat, Formació Professional i Ensenyament d'Idiomes

Especialitat: Matemáticas

Director/a: Maria Alberich Carramiñana

Data de lectura: 25 de junio de 2014

ÍNDICE

ANEXO 1: Capítulo 3 del libro "Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales" del Ministerio de Educación Nacional de la República de Colombia

Ministerio de Educación Nacional
República de Colombia
Libertad y Orden

Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales

PROYECTO

Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia

Ministerio de Educación Nacional
Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media.

PROYECTO

Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia

ANA CELIA CASTIBLANCO PAIBA
Coordinadora General del Proyecto
Ministerio de Educación Nacional

LUIS MORENO ARMELLA
Asesor Internacional
CINVESTAV – IPN, México

EDITOR

Ministerio de Educación Nacional
Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media.

Elaborado por:

ANA CELIA CASTIBLANCO PAIBA.
Ministerio de Educación Nacional.
HENRY URQUINA LLANOS.
Ministerio de Educación Nacional.
LEONOR CAMARGO URIBE.
Profesora Universidad Pedagógica Nacional.
MARTIN E. ACOSTA GEMPELER.
Universidad Joseph Fourier. Grenoble. Francia.

Con la colaboración de:

FABIOLA RODRÍGUEZ GARCÍA.
Instituto Pedagógico Nacional.

3

El aprendizaje de la geometria

La historia de geometría nos muestra de qué manera ha sucedido su evolución en una dinámica soportada por la interacción entre procesos de visualización, (ligados al pensamiento espacial), procesos de justificación, (ligados al pensamiento deductivo) y aplicaciones instrumentales que se llevan a cabo con el objeto de resolver problemas de la vida cotidiana, las ciencias o la misma matemática, modelar el mundo para interpretarlo, ampliar los horizontes conceptuales con teorías construidas axiomáticamente e interrelacionar campos diversos de conocimiento buscando en ellos una estructura común, entre otras cosas.

Para tener acceso a este vasto campo de desarrollo humano es necesario aprender geometría. Surgen entonces interrogantes como los siguientes:

¿por qué vías es posible lograr experiencia geométrica?, ¿cómo se llega a la conceptualización de nociones geométricas?, ¿cómo se adquiere comprensión y habilidad para usar procedimientos geométricos?, ¿qué implica razonar en geometría?

La investigación en este campo (de Villiers (1999), Moreno (2002), Duval (1998), Herscowitz y Vinner (1987)) ha llevado a reconocer que el aprendizaje de la geometría es un proceso complejo que pone en tensión ciertos polos del desarrollo cognitivo:

- Los procesos cognitivos de visualización y los procesos de justificación de carácter informal o formal.
- Los procesos de dar significado a los objetos y propiedades geométricas y los procesos de generalización y abstracción propios del conocimiento matemático que dan lugar a la descontextualización de dichos objetos.
- Los dominios empíricos de la geometría y los dominios teóricos.

Según como se desarrollen estas tensiones se accederá, o no, al conocimiento geométrico genuino y útil no sólo por su potencial en la resolución de problemas de las ciencias naturales, la técnica o la vida cotidiana sino como plataforma de lanzamiento hacia el desarrollo teórico del ámbito matemático cuyas fronteras de conocimiento son infinitas. Focalizar la atención en el aprendizaje conduce a estudiar las formas mediante las cuáles los estudiantes se expresan matemáticamente y los mecanismos mediante los cuales podemos afirmar que lo están haciendo. Por tal razón, centraremos nuestro análisis acerca del aprendizaje en geometría en tres aspectos que posiblemente recogen las tensiones antes expuestas: (i) los procesos de visualización y su potencial heurístico en la resolución de problemas, (ii) los procesos de justificación propios de la actividad geométrica y (iii) el papel que juegan las construcciones geométricas en el desarrollo del conocimiento geométrico.

Trataremos de ilustrar que los procesos de visualización requieren, para su desarrollo, superar dificultades asociadas a las condiciones fisiológicas propias de la percepción visual. A su vez, desarrollaremos la idea según la cual, el desarrollo de los procesos de justificación han de superar dificultades inherentes a la aparente falta de sentido de una organización deductiva del discurso. Estas dos clases de dificultades provienen precisamente de la articulación entre percepción y deducción, que se concreta en la diferenciación entre figura geométrica y dibujo. Y finalmente mostraremos que precisamente la forma más antigua de intento de superación de este conflicto es la construcción geometrica, que permite asegurar las características geométricas del dibujo.

3.1. Procesos de visualización

La visualización integra los procesos por medio de los cuales se obtienen conclusiones, a partir de las representaciones de los objetos bi o tridimensionales y de las relaciones o transformaciones observadas en construcciones y manipulaciones (Clements y Battista, 1992). Está en estrecha relación con la representación del espacio, la exploración heurística o la visión sinóptica de una situación compleja.

Muchas personas creen que la visualización es una habilidad innata y una cuestión que debe permanecer al margen de la actividad educativa. Sin embargo, dado que los procesos de visualización están en la base de la actividad cognitiva en geometría el estudiante debe ir evolucionando en la *"forma de mirar"* los objetos, desde percepciones visuales simples, hasta aquellas que le permiten explotar el potencial heurístico de la visualización. A continuación sugerimos tres niveles de visualización que caracterizan su desarrollo, que están en franca correspondencia con los tipos de visualización propuestos por Duval (1998).

3.1.1 Nivel global de percepción visual

En el nivel mas elemental de visualización encontramos la percepción global de las imágenes, que es esencial en la actividad geométrica y nos permite asociar figuras a objetos físicos. En este nivel, se destaca la forma total de la imagen. Así, por ejemplo, una representación como la de la figura 1 puede asociarse a un techo, la parte superior de una mesa, o a un cuadrado visto en perspectiva.

Fig.1

En un contexto matemático, la percepción global actúa para reconocer formas prototípicas que se asocian con nombres de figuras geométricas.

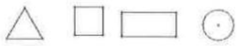


Fig.2

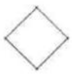
En la percepción de estas formas prototípicas predominan aspectos no matemáticos como la posición (boca arriba, boca abajo) o el tipo de trazo (grueso, delgado). Por esta razón, este nivel debe dar pasó, en la enseñanza de la geometría, lo más pronto posible, a una mirada matemática de las figuras que active la mente hacia la búsqueda de objetos geométricos y sus relaciones.

3.1.2. Nivel de percepción de elementos constitutivos

En un nivel posterior de visualización ya no solamente se percibe la forma global, sino que se percibe la imagen como constituida por elementos de una misma dimensión o dimensiones inferiores. Así, una imagen tridimensional se verá como formada por figuras tridimensionales o bidimensionales, una imagen bidimensional se verá como formada por figuras bidimensionales, unidimensionales (segmentos) o de dimensión cero (puntos).

Desde el punto de vista matemático, lo relevante para construir conceptos y relaciones geométricas, es la identificación de esos elementos constitutivos de la figura y las relaciones entre ellos. Por eso es indispensable la intervención de un enunciado que describa esas relaciones. En este nivel entonces se rompe con el esquema de imágenes prototípicas, pues la orientación o tamaño de las formas dejan de ser relevantes, para considerar en primer plano las relaciones entre los elementos constitutivos.

De esta manera, si en un primer nivel de visualización la figura 3 no es percibida como un cuadrado, en este nivel si podrá considerarse como tal.



este es un cuadrado

fig.3

Es importante considerar que el enunciado, a pesar de no ser un recurso de representación visual, influencia la visualización. Esencialmente ayuda a re-enfocar la atención de manera que puedan percibirse aspectos que pueden pasar desapercibidos sin el enunciado. Además, permite comenzar a diferenciar entre un dibujo y una figura geométrica al aclarar qué información se puede obtener de la figura y cuál no. Cuando un dibujo como el que se presenta en la figura 3 va acompañado de un enunciado *"este es un cuadrado"* se aseguran las relaciones de congruencia y perpendicularidad entre los lados. De lo contrario, la sólo percepción de dichas relaciones no las garantiza. Convencionalmente sin embargo, ciertas relaciones geométricas como la colinealidad de puntos, la interestancia, la relación par lineal o el hecho de tener pares de ángulos opuestos por el vértice se admiten con la sólo observación de la configuración.

En la identificación de las relaciones geométricas, un aspecto que ejerce una gran influencia es la orientación, pues hace parte de nuestra posición erguida, la cual hace entrar en juego relaciones espaciales como arriba y abajo, adelante y atrás, izquierda y derecha, y por extensión a las imágenes bidimensionales (representaciones en papel), lo horizontal y lo vertical. De esta manera, las relaciones de paralelismo y perpendicularidad, por ejemplo, son más fácilmente reconocibles cuando tienen orientación vertical u horizontal. Además, el fenómeno de gravedad influencia en gran medida nuestra percepción, lo que nos hace tratar de colocar siempre las figuras con la base abajo. Una estrategia didáctica para liberar la mente de estas restricciones consiste en forzar la identificación de las relaciones antes mencionadas, en figuras cuyas posiciones no sean las estándares.

La identificación de partes constitutivas de una figura geométrica depende estrechamente del desarrollo de la percepción visual. Para una mejor comprensión de este fenómeno, es necesario profundizar un poco en dicho proceso. Desde el punto de vista fisiológico, hay una cierta predisposición a captar algunos aspectos de las imágenes, mientras que otros quedan inhibidos. Esto hace que de manera espontánea podamos percibir fácilmente algunas características de las imágenes que vemos, mientras que otras quedan "ocultas".

Percibimos mas fácilmente las figuras cerradas y cóncavas y no las figuras abiertas o convexas. La figura 4, por ejemplo, se percibirá mas fácilmente como dos triángulos con un vértice común, y no como un cuadrilátero convexo.

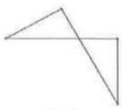


fig.4

Por otra parte, en imágenes complejas, donde puede descomponerse la figura total en distintas componentes más simples, entran en juego otros dos aspectos que inhiben o potencian la percepción: la *complementariedad* y el *solapamiento*. La complementariedad hace referencia a la característica de los componentes de la figura global de constituir la totalidad de la figura inicial, al momento de juntarse (figura 5). Si las figuras son complementarias será más fácil su percepción. El solapamiento tiene que ver con el hecho de qué las figuras que reconocemos dentro de una configuración global compartan regiones de la figura original. Si dos figuras están solapadas será más difícil su percepción. Fisiológicamente predomina la percepción de figuras complementarias y no solapadas.

fig. 5: figuras complementarias

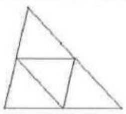


fig. 6: figuras solapadas

Así por ejemplo, en la figura 6, será más fácil percibir los cuatro triángulos, pues son complementarios y no se solapan que los tres paralelogramos que la conforman, pues estos se solapan entre sí.

La necesidad de desarrollar la percepción visual con el fin de superar las limitaciones fisiológicas es ejemplificada por Samper y Leguizamón y Camargo (2000) así: " *una mirada ligera al rectángulo ABCD (figura 7) permite identificar los triángulos ΔAEB, ΔBEC, ΔCED, y ΔDEA. Solamente después de dominar cierta práctica en la visualización es posible reconocer que la figura es la unión de los triángulos ΔADC, y ΔABC o ΔADB y ΔCBD. Si la tarea es probar que las diagonales del rectángulo son congruentes, es necesario identificar los triángulos solapados ΔDAC y ΔCBD".*

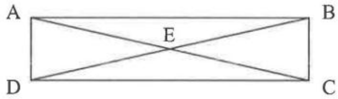


Figura 7

Finalmente, hay otro aspecto que determina fisiológicamente nuestra percepción visual y que aunque tradicionalmente no ha tenido gran incidencia en el trabajo en geometría, comienza a ser tenido en cuenta con las nuevas posibilidades de representación computarizada: el movimiento. Fisiológicamente estamos preparados para captar los cuerpos en movimiento más fácilmente que los estáticos. De hecho, el mecanismo de defensa de muchos animales consiste en mimetizarse con el medio ambiente, y mientras permanezcan inmóviles nos es muy difícil percibirlos. Este hecho se aprovecha en la propuesta curricular de geometría de los Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación (MEN, 1998) donde se plantea, como recurso didáctico, el estudiar la congruencia de figuras a partir de las transformaciones isométricas del plano, aprovechando la capacidad humana de captar lo dinámico más que lo estático. De esta manera es posible ver una congruencia como el producto de una operación isométrica, o una semejanza como el resultado de una homotecia.

12

Como ya lo hemos mencionado, la percepción visual se va enriqueciendo con los enunciados que acompañan las figuras. Estos orientan la atención, de manera que puedan superarse posibles predisposiciones fisiológicas y se comiencen a ver las figuras matemáticamente. La enunciación verbal de características nos ayuda a centrar la atención en aspectos que no son percibidos de manera espontánea y, de esta manera, el discurso se convierte en catalizador de la percepción visual. Como lo propone Duval:

> *"Vemos y hablamos (en voz alta o mentalmente) sobre lo que estamos viendo. La distinción visual suscita palabras al menos implícitamente, y las palabras enunciadas mentalmente pueden cambiar el foco de atención hacia aspectos desapercibidos en la figura. Este cambio de anclaje pasa normalmente desapercibido. Desafortunadamente para la enseñanza de la geometría! Porque el alumno no tiene el mismo lenguaje interno que un matemático sobre las gestalts y configuraciones identificadas perceptivamente. Y existen relaciones entre el lenguaje interno y el razonamiento. Mirar una figura puede ser suficiente para comprender una situación geométrica o para convencerse únicamente cuando todos esos cambios pueden realizarse y se entremezclan. ¿Pero son maneras naturales y comunes de mirar cualquier representación, sea material o mental? ¿Puedo yo (alumno) ver lo mismo que usted (profesor) sin que usted me haya explicado y sin que me haya señalado que es lo que debo ver? Esa es la pregunta..." (Duval, 2000).*

Hemos visto como, la exploración de diversas configuraciones en una figura proporciona información útil. En una figura geométrica es posible encontrar más subconfiguraciones que aquellas que se hacen evidentes en la construcción de la misma o en el enunciado que acompaña la figura. Son quizás estas últimas la que crean el poder heurístico de las figuras al dar pautas claves para identificar nuevas relaciones geométricas. Distinguirlas no necesariamente es una habilidad natural por lo que hay que hacer esfuerzos educativos en ese sentido.

3.1.3. Nivel operativo de percepción visual

Es en este tercer nivel de visualización en el que podemos operar sobre las figuras, realizando verdaderas transformaciones visuales que no están necesariamente mediadas por el discurso. Es el caso, por ejemplo de las llamadas *"pruebas sin palabras"*. En este caso ya no se trata únicamente de la percepción de características de una configuración, sino de una manipulación mental de las subconfiguraciones, para obtener otra disposición significativa y útil.

A partir de una configuración se reorganizan los elementos constitutivos de una figura, que se mueven como piezas de un rompecabezas, para lograr otra configuración relevante para la solución de un problema. Un ejemplo típico de este nivel de percepción son las pruebas sin palabras del Teorema de Pitágoras (figura 8).

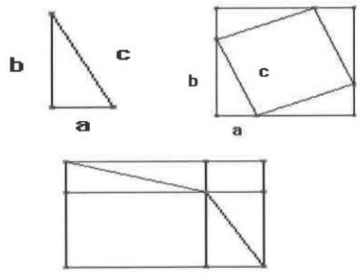


figura 8: ejemplo de demostración del teorema de pitágoras

En el triangulo rectángulo $c^2 = a^2 + b^2$. (El primer cuadrado tiene por área $(a + b)^2$, y está *conformado por un cuadrado de área c^2 y cuatro triángulos de área ab/2. El segundo cuadrado también tiene un área de $(a+b)^2$ y está conformado por los mismos cuatro triángulos de área ab/2 y dos cuadrados de área a^2 y b^2. Por lo tanto, $c^2 = a^2 + b^2$.*

En el ejemplo de la figura 8 puede verse de qué manera actúa la percepción de elementos constitutivos, en combinación con la percepción operativa. En el primer paso, a partir del enunciado del teorema se encuentra una disposición figural de un cuadrado, cuya área corresponde a la suma de las medidas de los catetos; este cuadrado contiene en su interior, otro cuadrado, cuya área es el cuadrado de la medida de la hipotenusa. En el segundo paso, la configuración se transforma variando su composición como en un rompecabezas, desplazando y reorganizando las subconfiguraciones que la conforman para obtener, dentro del mismo cuadrado inicial, dos cuadrados cuyas áreas son respectivamente los cuadrados de las medidas de los catetos.

Como ya lo mencionamos, en el contexto de un problema dado, una o varias configuraciones son relevantes mientras que otras reorganizaciones no lo son. La capacidad de visualizar en mayor o menor grado cuál es la reorganización efectiva da a la visión su poder heurístico para la solución de problemas. Pero implica el esfuerzo de reorganizar las configuraciones significativamente y usarlas para "ver" por qué una proposición matemática puede ser cierta y cómo se podría realizar una estrategia de trabajo. Veamos un ejemplo de uso del nivel operativo visual en la resolución de un problema geométrico propuesto por Duval (2000): *en la figura AC es la diagonal del rectángulo ABCD ¿cuál es la relación entre las áreas de los dos rectágulos sombreados?*

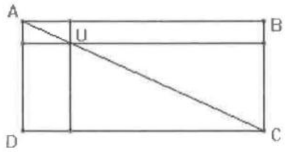


fig.9

Una solución visual típica sería:

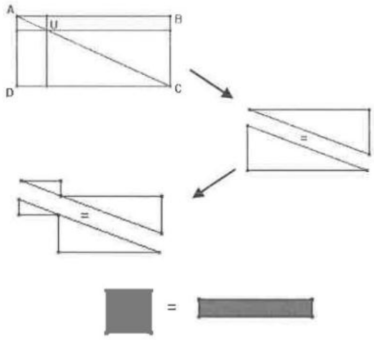


fig.10

3.2. Procesos de justificación

Ya hemos mencionado como una de las dificultades en el aprendizaje de la geometría, la articulación entre los procesos de visualización y los procesos de justificación en geometría. Otro aspecto igualmente conflictivo, referenciado por Duval (1999) es el fenómeno de "falsa proximidad" entre los discursos naturales mediante los cuales nos comunicamos en otros campos de la actividad humana y los discursos deductivos, mediante los cuales se construye el discurso geométrico.

Dado que utilizamos el mismo sistema de símbolos, pareciera que la forma de construcción de un argumento para convencer a alguien de la pertinencia de hacer algo es la misma con la cual se construye una demostración. Diferenciar los dos tipos de discursos es fundamental para el aprendiz, máxime cuando en ocasiones el discurso natural es aceptado en matemáticas y en otras ocasiones no. Este hecho puede provocar dificultades en los alumnos, que no alcanzan a apreciar la diferencia de organización de una justificación deductiva, puesto que es asimilable a cualquier otro argumento del lenguaje natural.

Al ir avanzando en el aprendizaje de la geometría los estudiantes deben ir cambiando la organización discursiva de su razonamiento para ir ganando en precisión, perfeccionando el lenguaje geométrico, introduciendo encadenamientos lógicos, accediendo a la estructura deductiva. Por lo tanto, la transformación del discurso debe llevar de una argumentación informal que se apoya fuertemente en la visualización, y por lo tanto es de carácter descriptivo, a una organización discursiva formal que encadena proposiciones usando reglas lógicas. En este proceso se pasa por el proceso de precisión del lenguaje, en el que es imprescindible enunciar definiciones y teoremas.

La organización de un discurso informal, de carácter descriptivo es bien diferente a la organización de un discurso formal. En el primer caso, se ligan proposiciones o enunciados a partir de la visualización de una figura y sus configuraciones, por asociaciones evidentes y espontáneas tal como argumentamos al conversar. Las asociaciones entre enunciados se explicitan mediante una descripción que muestra equivalencias u operaciones entre subconfiguraciones para producir otras. En el problema propuesto por Duval que presentamos en la sección anterior, una argumentación informal de la equivalencia de las áreas de los rectángulos sombreados sería algo como:

- en el rectángulo ABCD se distinguen dos triángulos congruentes Δ ABC y ΔADC, resultado de dividir el rectángulo mediante una diagonal.
- si se elimina la porción sombreada en cada uno de los triángulos, se obtienen dos figuras compuestas por dos triángulos que son respectivamente congruentes.
- como han quedado dos regiones de igual área, las regiones que se eliminaron, es decir, los rectángulos sombreados, también deben tener igual área.

En el caso de la organización de discursos formales la situación es muy diferente. En primer lugar el razonamiento no se centra en una descripción basada en la visualización de una figura; las figuras sólo brindan un escenario para articular el discurso que comienza cuando se declara la relación entre dos proposiciones mediante una inferencia del tipo *Si... , entonces....* La organización del discurso requiere hacer uso únicamente de proposiciones que de antemano tienen un estatus teórico específico (axiomas, definiciones, teoremas) y conducen un paso adelante hacia las conclusiones. Así, los proposiciones se ligan de acuerdo con su estatus y la organización funciona por sustitución de proposiciones como en el cálculo y no por asociaciones como en el lenguaje informal.

En el problema que nos ocupa, un encadenamiento deductivo se replantearía así: *si AC es la diagonal del rectángulo ABCD, las áreas de los rectángulos sombreados son iguales.* El encadenamiento deductivo podría ser de la siguiente forma:

(i) si AC es la diagonal del rectángulo ABCD, entonces a (ΔADC) = a (ΔCBA).

(ii) a (ΔADC) = a(ΔAEU) + a (ΔUFC) + a (□UFCG),

(iii) a (ΔCBA) = a(ΔUHA) + a (ΔCGU) + a (□UGBH)

(iv) a(ΔAEU) = a(ΔUHA), porque AU es diagonal del rectángulo AEUH

(v) a (ΔUFC) = a (ΔCGU), porque UC es diagonal del rectángulo UFCG

(vi) de (ii) y (iii) a(ΔAEU) + a (ΔUFC) + a (□UFCG) = a(ΔUHA) + a (ΔCGU) + a (□UGBH)

(vii) de (i) y (v) a (□UFCG) = a (□UGBH)

El discurso teórico no es una manera natural de razonar pues está muy lejos de las formas de razonamiento usadas en la vida diaria. Relacionar las proposiciones de acuerdo con su estatus va en contrar de las asociaciones evidentes o espontáneas. Axiomas, teoremas y definiciones no son argumentos que sustenten una tesis o una opinión sino eslabones de una cadena articulados estratégicamente para llevar de la hipótesis a la tesis. Para usar un teorema se requiere que éste se ajuste a las proposiciones ya articuladas y haga el empate con las afirmaciones que se tiene previsto vengan a continuación. Muchos alumnos no distinguen este proceso teórico deductivo, de un proceso discursivo más natural, incluso cuando mencionan, aparentemente de manera correcta, definiciones y teoremas. Les parece una exigencia artificial e inutil del profesor. Pero aquellos que descubren el proceso deductivo, especialmente en los niveles locales de organización de las proposiciones, obtienen una experiencia personal de la necesidad lógica de la conclusión y del poder de esta forma de razonamiento. Perciben la naturaleza y el grado de fuerza de la convicción lograda acerca de la certeza de un enunciado por esta vía.

Podemos concluir que existe una brecha entre la argumentación informal y la justificación formal en un discursivo teórico. Uno de los principales problemas de la enseñanza de la geometría es la dificultad para hacer que muchos alumnos superen esta brecha. A veces, los profesores no tienen conciencia clara de la dificultad y no se hacen esfuerzos por superarla. Este proceso no puede pretender partir de un marco de definiciones ya construidas, pues de esa manera se pierde el sentido de necesidad de la precisión, y del acuerdo social necesariamente arbitrario asociado con las convenciones empleadas, y se reduce el razonamiento a un simple cálculo proposicional sin ningún sentido para el alumno. Por el contrario, ese proceso de transformación del discurso debe insertarse en un esfuerzo de interpretación y explicación de fenómenos teórico-perceptivos como lo son las construcciones geométricas, a las que nos referiremos en el siguiente apartado.

3.3. La construcción geométrica como encadenamiento "natural" de los procesos de visualización y los procesos de justificación.

Para muchos investigadores (Moreno, 2002; Laborde, 2000) las profundas diferencias entre las dimensiones de la geometría como ciencia del espacio y la forma, en la cual lo que vemos en una figura puede ser tomado como garantía de certeza, y la geometría deductiva, en la cual cualquier afirmación debe ser deducida de otras dadas, es motivo de constantes reflexiones ya que refleja las tensiones entre los procesos de visualización y los procesos de justificación. Ciertamente hay un profundo cambio de estatus de los objetos cuando nos movemos de la geometría de la evidencia visual a la geometría de los objetos y relaciones involucrados en un sistema deductivo. Pero la existencia de este salto conceptual no implica que el conocimiento anterior de los estudiantes no sea útil cuando se enfrentan a la tarea de probar como tampoco que esto implique que los procesos de resolución de una prueba sean puramente deductivos.

Podemos entonces identificar dos extremos de un continuo que va desde la posición totalmente perceptual, donde no interviene el razonamiento, hasta la posición totalmente formal, donde se ha eliminado todo referente perceptual para establecer un discurso teórico deductivo. En el amplio espectro entre estos dos extremos encontramos el espacio de exploración y de creatividad que ha ido constituyendo el trabajo en geometría escolar.

Como parte de ese esfuerzo de superar las limitaciones de la percepción, surgió la construcción geométrica. Podemos describirla como un dibujo técnico, en el que la utilización apropiada de ciertos instrumentos asegura la adecuación del dibujo a determinadas propiedades. La construcción geométrica tiene dos aspiraciones básicas: asegurar el cumplimiento de propiedades geométricas buscando superar las limitaciones de la percepción necesariamente presentes en el dibujo y lograr una generalización, asegurando la reproductibilidad del dibujo, tomando en cuenta (únicamente) las propiedades fundamentales del mismo por medio de la utilización de instrumentos técnicos como el compás y la regla. Una construcción geométrica se diferencia entonces de un simple dibujo, legitimando de cierta manera las conclusiones que pueden sacarse de ella, pues las propiedades presentes no son resultado del azar, sino que fueron construidas de manera explícita, o son un resultado necesario de esa construcción.

Más allá de la concreción de las construcciones realizadas sobre el papel, o en la pantalla de un computador, tales construcciones desbordan el marco de lo concreto e invaden terrenos teóricos. Es decir, las herramientas para producir los dibujos y sus reglas de uso corresponden a axiomas y teoremas de un mismo sistema teórico que no siempre está explícito. Dada una construcción, siempre es posible hallar un teorema que la valida y establece la "legalidad" de las relaciones entre los elementos de la figura. Adicionalmente, las construcciones añaden elementos conceptuales que ayudan a los estudiantes a reconocer y conectar las diferentes propiedades matemáticas necesrias para obtener, por ejemplo, una figura correcta, y posteriormente justificar por qué está correcta.

Allí reside la importancia de la construcción como motor del pensamiento deductivo, pues las propiedades explícitamente construidas se convierten en premisas, siendo las conclusiones otras propiedades verificadas en la construcción, pero que de alguna manera son "espontáneas". En palabras de de Villiers (1999), el alumno puede descubrir en la construcción propiedades que él no puso allí, lo cual le permite descubrir que hay alguna relación de implicación entre las propiedades que él puso, y las que descubrió despues.

Por supuesto, una construcción geométrica sigue siendo una representación limitada de un objeto matemático, limitada por el nivel de precisión de los instrumentos técnicos y por el nivel de pericia de quien efectúa el dibujo. La dificultad de la utilización de la construcción como campo de reflexión, radica en la dificultad motriz que conlleva a la utilización idónea de los instrumentos técnicos. El desarrollo de la habilidad necesaria consume mucho tiempo, mientras que el estatuto de dibujo no la justifica como habilidad matemática. Desde este punto de vista, los programas de computador pueden tomar a su cargo la precisión de los trazados, liberando la atención de los alumnos para concentrarla en la reflexión teórica sobre los mismos.

La construcción puede constituirse en campo de exploración y reflexión, de donde la deducción puede nacer y organizarse. Pone en evidencia propiedades geométricas en juego y las relaciones entre ellas, constituyéndose en la semilla de la argumentación. Esta, entendida como mecanismo para validar afirmaciones dentro de un contexto, a partir de la formulación de inferencias de carácter deductivo, da pie a la demostración, con lo cual las proposiciones geométricas cobran importancia por el papel que desempeñan en el sistema axiomático deductivo.

En síntesis, en este capítulo hemos desarrollado las siguientes ideas:

- Los procesos visualización están determinados por características fisiológicas que favorecen la percepción de ciertos aspectos y dificultan otros. De esta manera pueden resultar un obstáculo para el razonamiento en geometría, impidiendo la identificación de relaciones o componentes claves para la comprension del problema, o resultar un apoyo fundamental en dicho razonamiento.

- Los procesos de visualización pueden constituirse, en si mismos, en una forma de razonamiento tanto o más poderosa que la justificación y no asimilable con ésta.

- Los procesos de argumentación pueden influir nuestra percepción visual, permitiendo superar los obstáculos debidos al funcionamiento fisiológico.

- La justificación puede tomar dos formas: la argumentación informal y la argumentación formal generalmente de caracter deductivo.

- El trabajo complementario entre los procesos de visualización y los procesos de justificación puede favorecer una organización deductiva, pues se evidencian las relaciones de equivalencia o de inferencia entre distintos enunciados (por ejemplo: si un cuadrilátero tiene lados opuestos paralelos, entonces sus diagonales se bisecan).

- Al establecer conexiones entre los procesos de justificación y los procesos de visualización, el razonamiento deductivo adquiere sentido para los alumnos como posibilidad de explicación, de comprensión y de argumentación.

Bibliografía

ACOSTA, E; CAMARGO, L & RODRÍGUEZ, F. (2003). *Cabri y calculadora: Socio cognitivo y dominio de abstracción.* En: *Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas.* Serie Memorias. MEN. 369 P.

ACOSTA, M. (2001). *Simulación de un problema geométrico: Volumen de un Prisma.* Memorias del Seminario Nacional de formación de Docentes: Uso de nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional.

ALSINA, C; FORTUNY, & PEREZ, R. (1997) *¿Por qué Geometría?. Propuestas Didácticas para la ESO.* Editorial Síntesis. Colección Educación Matemática en Secundaria.

CAPPONI & LABORDE, C (eds) (1998). Actes de l'Université d'été: *Cabri Géomètre, de l'ordinateur à la calculatrice. De nouveaux outils pour l'enseignement de la géomètrie.* IREM et IUFM de Grenoble. Grenoble. Francia.

CAPPONI & LABORDE, C (eds) (1994). Actes de l'Université d'été: *Apprentissage et enseignement de la géométrie avec ordinateur: Utilization du logiciel Cabri Géomètre en classe.* IREM Grenoble, Domaine Universitaire, 38402 Saint Matin d'Hères. Grenoble. Francia.

CLEMENS, D. & BATTISTA, M. (1992). *Geometry and Spatial Reasoning.* En GROUWS, DOUGLAS (ed.). Handbook of Research on Mathematics teaching and Learning: a Project of the National Council of Teachers of Mathematics. NCTM, New York.

CUPPENS, Roger (2002). *Avec Cabri – Géomètre II, Jouez... Et Faites de la Géomètrie !* . No. 136. APMEN (Asocciation des Professeurs de mathématiques de l'enseignement public). Francia.

CUPPENS, Roger (1999). *Faire de la géométrie supérieure en jouant avec cabri – géomètre II.* Tome 1 No. 124 ; Tomo 2 No. 125. APMEN (Asocciation des Professeurs de mathématiques de l'enseignement public). Francia.

CENTRE INFORMATIQUE PEDAGOGIQUE (CIP) (1996). *Apprivoiser la géométrie avec Cabri – Géomètre.* Genève. Italia.

DAVIES, P. (1995).

DE VILLIERS (1999).

91

DUARTE, T. (1997). *Modelación y Computación en Ciencias y Matemáticas.* Revista de Informática Educativa, vol. 10, No. 2, pp. 171 – 182.

DUVAL, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática. Cali. Valle. 314 P.

DUVAL, R. (2000).

GONZÁLEZ-LÓPEZ, María J. (2000). *La gestión de la clase de geometría utilizando sistemas de geometría dinámica.* En Gómez P. y Rico L. (Eds). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática.* Granada: Editorial Universidad de Granada. España.

GONZÁLEZ, M. J. (2001). *Reflexiones en torno a la demostración* (recopilación de textos preparados por el Grupo de Aprendizaje de la Geometría). Documento en línea ver http://uv.es/~didmat/angel/ seiembid.html#textos.

GUTIERREZ, A. LABORDE, C., Noss R., Rakov S. (1999). *Tools and Technologies.* European Research in Mathematics Education *I*: Group 2. URL: www.fmd.uni-osnabrueck. de/ebooks/erme/cerme1- proceedings/cerme1-proceedings.html.

HERSHKOWITZ, R; VINNER, S & BRUCKHEIMER, M. *Activities with Teachers Based on Cognitive Research.* En Learning and Teaching Geometry, K – 12. Yearbook 1987. NCTN, Reston, Virginia.

KUTZLER, B. (1 996). El Taller de la TI- 92. Versión Española de: Ma, Dolores Rodríguez Soalleiro. Faster, Madrid.

LABORDE, C. (2000). *Dynamic geometry enviroments as a source of rich learning contextos for the complex activity of proving.* Revista: Educational Studies in Mathematics 44; 151 - 161.

LABORDE, C. (1998) *Visual phenomena in the teaching/learning of geometry in a computer – based enviroment*, en Mammana C; Villani V (eds). Perspectives on the teaching of geometry for the 21 st Century. ICMI Study. Kluwer Academic Publisher.

LABORDE, C. (1992) *Solving Problems in Computer Based Geometry Environments: The influence of the features of the software.* Zentrablatt für Didactik des Mathematik, 92 (4), 128 - 135.

LABORDE, C. (1996). *Cabri Géomètre o una nueva relación con la geometría,* en Puig L; Calderón J , Investigación y didáctica de las matemáticas, Ministerio de Educación y Ciencia, CIDE. Madrid.

LOZANO, E. L. (2003) Exploraciones Acerca de Ángulos Congruentes a Partir de Ambientes de Aprendizaje Dinámicos. En: *Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas.* Serie Memorias. MEN. 369 P.

MAMMANA, C. & VILLANI V. (1998). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century.* Kluwer Academic Publishers. 340 P.

MEN (2002). Seminario Nacional de formación de docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas, Serie memorias, Bogotá, Colombia.

MEN (1999). *Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas*. Serie Lineamientos Curriculares. Punto exe editores. Bogotá D.C., Colombia.

MEN (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Areas obligatorias y fundamentales.* Serie Lineamientos. República de Colombia. 1998

MEN (2003). *Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas.* Enlace editores. Bogotá D.C., Colombia.

MORENO, L. (2002) *Cognición y computación, el caso de la geometría y la visualización.* Memorias del Seminario Nacional de formación de Docentes: Uso de nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional.

MORENO, L. (1996). *La demostración en perspectiva.* Revista Mexicana de Investigación Educativa, Vol. 1.

MORENO, L. (2001). *Cognición, Mediación y Tecnología.* Avance y Perspectiva. Vol 20. PP. 65 – 68.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2000). *Principles and standars for school mathematics*. USA: Library of Congress.

NEUBRAND, M. (1998). *The Geometry curriculum in Germany: past and future trends*. En Mammana y Villani, perspective on the Teaching of Geometry for the 21st Century, ICMI Study, Kluwer Academic Publishers, p. 259.

NISS, M. (1998). *Teacher qualifications and the education of teachers.* En Mammana y Villani. Perspectives on the Teaching of geometry for the 21st Century. Klwer Academic Publishsers, pp. 297 - 318.

POLYA, G. (1978). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, México.

RUTHVEN, K. (1996). *Calculators in the Mathematics Currículo: The Scope of Personal Computational Technology.* En: Bishop, A. et. al. (eds). International Handbook of Mathematical Education, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.

SAMPER, C; LEGUIZAMON, C & CAMARGO, L. *Razonamiento en geometría.* Revista EMA, vol. 6, no. 2, SCHUMANN, H., GREEN, D. (1994). *Discovering Geometry with a computer: using Cabri-Géomètre*. Chart Well-Bratt, Sweden.

VADCARD, L. (1999). *La Validation en Geometrie au College avec Cabri – Géomètre. Mesures exploratoires et mesures probatoires.* Petit X, No. 50.

VIÑAS M y otros (2003). *La Calculadora: Una Fuente De Exploraciones Conceptuales.* En: *Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas.* Serie Memorias. MEN. 369 P.

Fuente: véase [10].

ANEXO 2.1): **Actividad de geometría edición 2010-2011.**

activitat 3

3 Mentre sopen, la Laila explica que coneix una pizzeria on fan pizzes quadrades i també pizzes hexagonals. Els altres no s'ho creuen i la Laila, per demostrar que no s'ho ha inventat, busca el web i mostra l'anunci als altres.

Si no t'agraden gaire les vores, quina pizza has de demanar? Utilitza els conceptes de *perímetre* i *àrea* per justificar-ho.

$\text{Vora}_{circular}$ = 69,11 cm; $\text{vora}_{quadrada}$ = 80 cm; $\text{vora}_{hexagonal}$ = 72 cm

$A_{circular}$ = 380,13 cm^2; $A_{quadrada}$ = 400 cm^2; $A_{hexagonal}$ = 374,12 cm^2

La que té menys vora és la circular, la que en té més és la quadrada. Podem descartar l'hexagonal donat que té més vora que la circular però menys àrea de pizza. Entre la circular i la quadrada, és discutible perquè la quadrada aporta més superfície (20 cm^2 més), encara que tindrem 10 cm més de vora. Si els arguments estan ben presentats, podem acceptar qualsevol de les dues respostes (circular o quadrada). 0-3

Valoració: Si planteja correctament la resolució del problema, usant les fórmules adients i comet algun error de càlcul, 1 punt. Si arriba a la resposta correcta i ben argumentada, 3 punts.

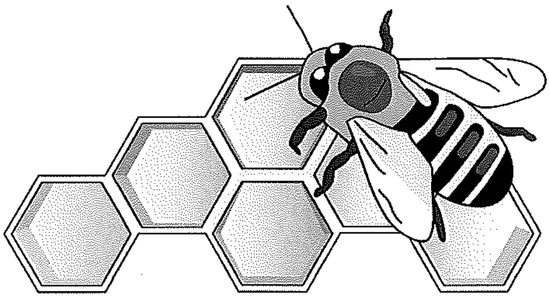
6

Fuente: véase [2].

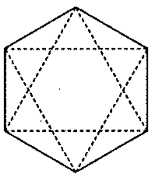
ANEXO 2.2): **Actividad de geometría edición 2011-2012.**

activitat 3

Les abelles construeixen el rusc formant nombroses cel·les hexagonals.

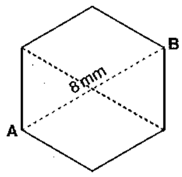


1 Dibuixa els dos **triangles equilàters** que es formen quan uneixes tres vèrtexs de l'hexàgon.



0-1

2 Si les cel·les hexagonals que construeixen les abelles mesuren 8 mm de diagonal (distància entre els punts A i B), quant mesura un costat de l'hexàgon?

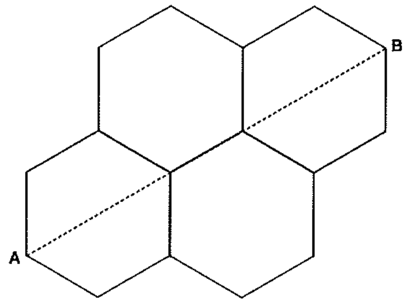


Resposta: 4 mm

0-1

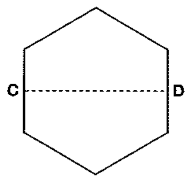
activitat 3

3 Si continuem considerant les cel·les hexagonals del nostre rusc, quina distància hi ha entre els punts A i B?



Resposta: 20 mm 0-1

4 Si els punts C i D estan situats al mig d'aquests dos costats de l'hexàgon de la cel·la,



4.1. la distància entre els punts C i D és:

- **a.** Menys de 8 mm. ☒
- **b.** Igual a 8 mm. ☐
- **c.** Més de 8 mm. ☐

0-1

4.2. Explica la teva resposta a l'apartat anterior (4.1.).

La distància entre C i D és menor que el diàmetre.

Una apotema és menor que un costat o radi. 0-1

S'admeten altres respostes semblants, on s'indiqui que la distància de C a D és menor de 8 mm.

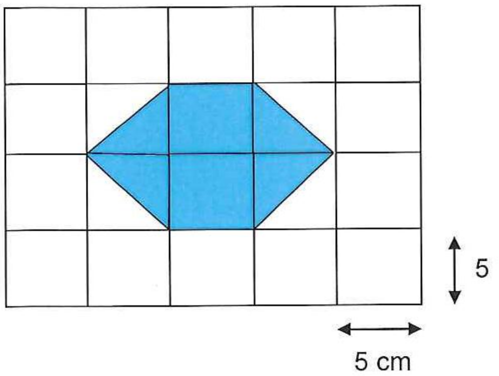
6

Fuente: véase [2].

ANEXO 2.3): **Actividades de geometría edición 2012-2013.**

Activitat 2: Figura hexagonal

Sobre un paper quadriculat, el David dibuixa una figura hexagonal segons s'observa en el dibuix següent:



1 Calcula l'**àrea** (color fosc) de la figura hexagonal.

0-1

Resposta: ....**100**... cm^2

2 El David dubta del valor del **perímetre** de la figura hexagonal. Marca amb una X la resposta correcta:

a. ☐	**b.** ☐	**c.** ☒ X
menys de 30 cm	igual a 30 cm	més de 30 cm

0-1

3 Justifica la teva resposta a l'apartat anterior. *(Vegeu els criteris de correcció)*

Per exemple:

No tots els costats mesuren 5 cm.

Hi ha 4 costats que mesuren més de 5 cm cada un i els altres 2 costats mesuren 5 cm cada un. Per tant, el perímetre és més gran de 30 cm.

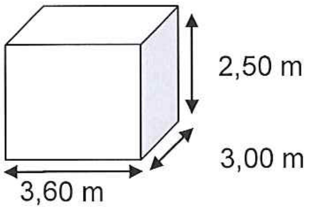
0-1

....

Activitat 7: Reformes en una habitació

Una habitació té forma de prisma recte de base rectangular, mesura 3,60 m per 3,00 m, i fa 2,50 m d'altura (El dibuix no està fet a escala)

1 Per instal·lar l'aire condicionat, necessitem conèixer el volum de l'habitació. Quants m^3 fa l'habitació?



0-1

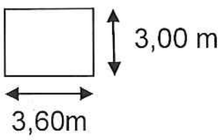
Resposta: ....**27**............................. m^3

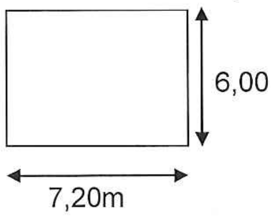
2 També volem canviar les rajoles del terra d'aquesta habitació rectangular i farem servir rajoles quadrades de 30 cm x 30 cm.
Si no es trenca cap rajola, quantes se'n necessiten per enrajolar tota l'habitació?

0-1

Resposta: ....**120**.................................... rajoles

3 Enrajolar l'habitació actual (3,60 m x 3,00 m) amb les rajoles de 30 cm x 30 cm costa 200 € de material. Si l'habitació tingués el doble de llargada i el doble d'amplada, per quin valor s'hauria de multiplicar aquest preu de 200 € per saber el cost del material necessari per enrajolar la nova habitació?

Habitació actual: 

Habitació nova 

Marca amb una X la resposta correcta:

a. ☐ per 2 **b.** ☐ per 3 **c.** ☒ X per 4

0-1

4 Explica la teva resposta de l'apartat anterior. *(Vegeu els criteris de correcció)*

Per exemple:

Àrea de l'habitació nova: 7,20 x 6,00 = (2x3,60) x (2x 3,00) = 4x(3,60 x 3,00)

0-1

= 4 x Àrea de l'habitació actual

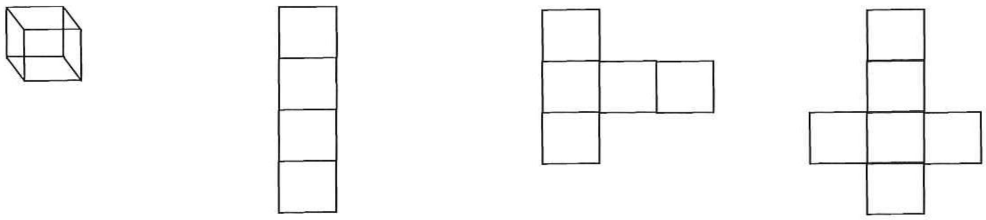
Fuente: véase [2].

<u>ANEXO 2.4)</u>: Actividad de geometría edición 2013-2014.

Activitat 3: La fàbrica de caixes

Una empresa fabrica caixes de forma cúbica que mesuren 20 cm d'aresta.

1 Quin d'aquests tres desenvolupaments és un desenvolupament de la caixa de cartró?



a. ☐ b. ☐ c. X

0-1

2 L'empresa cobreix totes les cares de cada caixa de cartró amb paper adhesiu. Si una làmina quadrada de paper adhesiu té una superfície d'1 m^2, quantes caixes es poden cobrir amb una làmina?

0-1

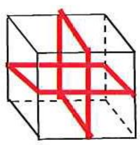
Resposta: ....4................................. caixes

3 Les caixes es guarden en contenidors de forma cúbica de 2 metres d'aresta. Quantes caixes caben a cada contenidor?

0-1

Resposta: ....1.000.................................... caixes

4 Per millorar la imatge, s'hi col·loca una cinta de color tal com s'indica a la figura. Quants metres de cinta es necessiten per a 5 caixes?



20 cm

0-1

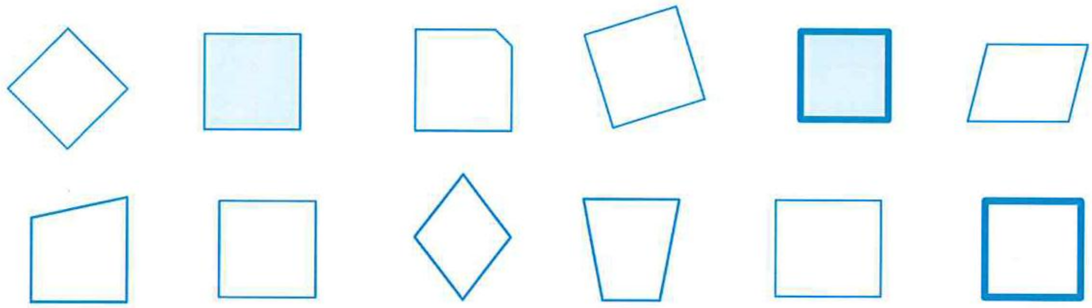
Resposta: ....8.................................... m

<u>Fuente: véase [2].</u>

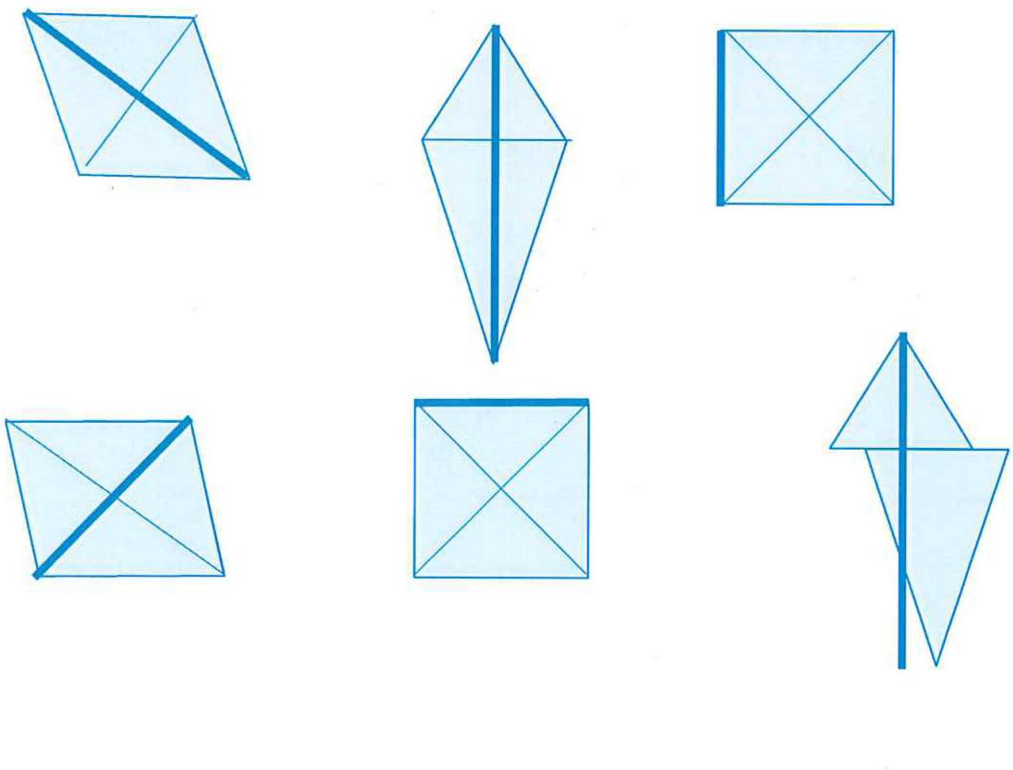
<u>ANEXO 3)</u>: Pruebas inicial y final

Prova inicial Geometria 2on ESO
Nom alumne:
Profe en pràctiques: Marta Roca
Data: Febrer 2014

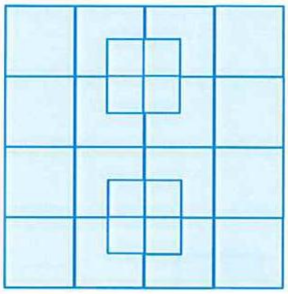
1)Encercla els quadrats que trobis en la sèrie següent:



2)Cadascuna de les figures següents està formada per diversos segments, i un d'ells està ressaltat amb més gruix. Marca amb el regle, en cas que puguis, el(s) segment(s) perpendicular(s) al que està ressaltat.



3)Quants quadrats trobes a la següent figura, sabent  que mesura 1 unitat de costat?



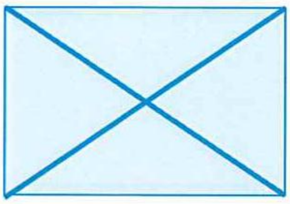
Quants quadrats de costat 1/2 , si n'hi ha?
Quants quadrats de costat 1, si n'hi ha?

Quants quadrats de costat 2, si n'hi ha?

Quants quadrats de costat 3, si n'hi ha?

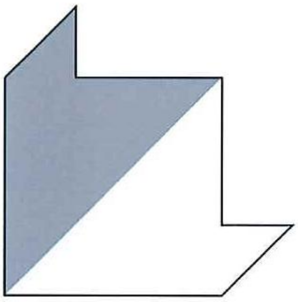
Quants quadrats de costat 4, si n'hi ha?

4)Quants triangles pots trobar dins de la figura següent?. Marca'ls amb diferents colors o dibuixa'ls al costat de la figura.

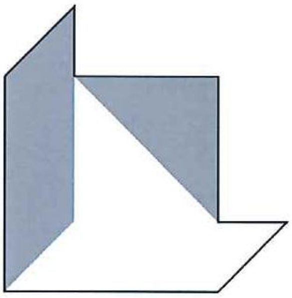


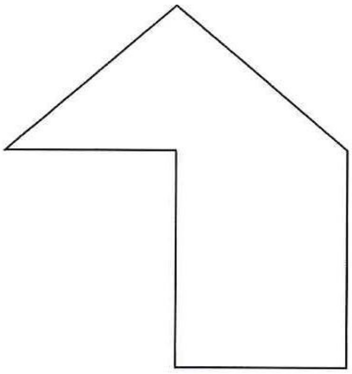
5)Pinta la meitat de cadascuna de les tres figures següents, com en l'exemple:

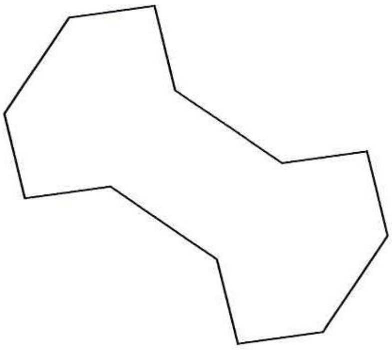
Per exemple així

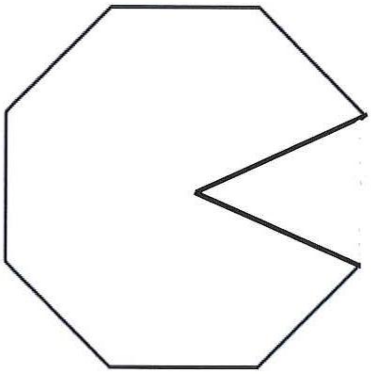


o bé així

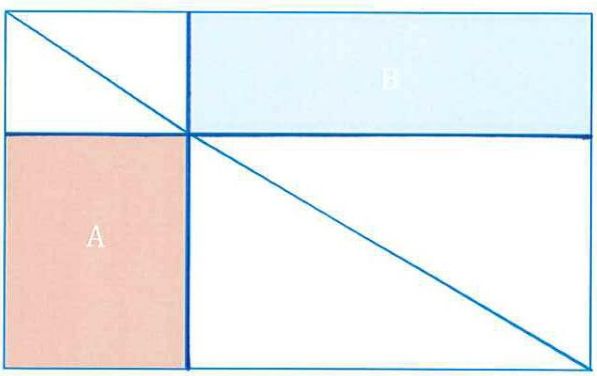








6)En aquest figura, quina és la relació entre les àrees de les dues zones ombrejades, A i B?



- àrees iguals
- àrea de A > àrea de B
- àrea de A < àrea de B

7)Justifica la teva resposta donada a l'exercici 6.

ANEXO 4.1): Parilla de indicadores evaluación prueba inicial.

Parrilla de indicadores para evaluación prueba inicial

	Ejercicio 1						Ejercicio 2								Ejercicio 3					Ejercicio 4	Ejercicio 5			Ejercicio 6	Ejercicio 7
Alumnos									1 perp	2 perp	1 perp	2 perp			Lado 1/4 (8)	Lado 1 (18)	Lado 2 (9)	Lado 3 (4)	Lado 4 (1)	8 triángulos				OK/NOK	Justificación OK
1	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√
2	√	√	√	√	√	√	√	√	X	X	X	X	√	X	√	8	16	NC	NC	2	X	√	√	√	X
3	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	X	√	√	√	4	1	√	√	X	√	√	√	X
4	√	√	√	√	√	√	√	√	X	X	X	X	X	√	√	√	7	√	√	√	√	√	√	X	X
5	√	√	√	√	√	√	√	√	X	X	X	X	√	√	√	√	5	√	√	√	√	√	√	√	√
6	√	X	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	6	√	√	4	√	√	√	√	X
7	√	√	√	√	√	√	X	√	√	X	√	X	X	√	√	√	√	√	√	√	X	√	√	X	X
8	√	√	√	√	√	√	X	X	X	X	X	X	X	X	X	√	4	1	√	6	√	√	√	NC	NC
9	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	X	√	√	0	8	0	8	12	√	√	X	√	X
10	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	X
11	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	4	1	√	4	X	√	√	√	X
12	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	8	√	√	√	√	√	√	X	X
13	√	√	√	√	√	√	√	√	X	X	X	X	√	√	X	√	4	1	√	4	√	√	√	√	X
14	X	√	√	√	√	√	√	√	X	X	X	X	√	√	√	√	8	12	4	4	√	√	√	√	X
15	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	X	√	√	16	4	1	√	4	√	√	√	X	X
16	√	√	√	√	√	√	√	√	X	X	X	X	√	√	NA	NA	NA	NA	NA	NA	X	√	√	NA	NA
17	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	X	X
18	√	√	X	√	√	√	√	√	X	X	X	X	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	X	X
19	√	√	√	√	√	√	√	√	X	X	X	X	√	√	√	√	√	√	√	√	X	√	√	X	X
20	√	√	√	√	√	√	√	√	X	X	X	X	X	X	√	√	√	√	√	√	√	√	√	X	X
21	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	X	√	√	√	6	√	√	12	√	√	√	√	X
22	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	8	√	√	4	√	√	√	√	√
23	√	√	√	√	√	√	√	√	X	X	X	X	√	√	√	√	16	√	4	√	√	√	√	X	X
24	√	√	√	√	√	√	√	√	X	X	X	X	√	√	√	16	4	1	√	√	X	√	X	X	X
25	√	√	√	√	√	√	√	√	X	X	X	X	√	X	√	√	4	1	√	4	X	√	√	X	NC

NA: no aplica. Alumno con dificultades de aprendizaje, al que se le piden sólo 3 ejercicios de los 7 propuestos

NC: no contesta. Respuestas en blanco por parte del alumno

En el ejercicio 3, los números entre paréntesis corresponden a las respuestas correctas (el alumno debía encontrar 8 cuadrados de lado 1/2, 18 cuadrados de lado 1, etc). En la parrilla , hemos indicado el númerdo de cuadrados indicados por cada alumno en los casos en qué han contestado incorrectamente.

ANEXO 4.2): Parilla de indicadores evaluación prueba final.

Parrilla de indicadores para evaluación prueba final

	Ejercicio 1						Ejercicio 2								Ejercicio 3					Ejercicio 4	Ejercicio 5			Ejercicio 6	Ejercicio 7
Alumnos									1 perp	2 perp	1 perp	2 perp			Lado 1/4 (8)	Lado 1 (18)	Lado 2 (9)	Lado 3 (4)	Lado 4 (1)	8 triángulos				OK/NOK	Justificación OK
1	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√
2	√	√	√	√	√	√	√	√	X	X	X	X	√	X	√	16	8	5	4	√	√	√	√	√	X
3	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	5	1	√	6	X	√	√	√	X
4	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	X	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	X
5	√	√	√	√	√	√	√	√	√	X	√	X	√	√	√	√	8	√	√	√	√	√	√	√	X
6	√	√	√	√	√	√	√	√	X	X	X	X	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	X
7	√	√	√	√	√	X	√	√	√	√	√	√	X	√	√	√	8	√	√	6	X	√	√	X	X
8	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	X	√	√	√	√	8	√	6	√	√	√	X	X
9	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	12	√	√	X	X	X
10	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	X	X
11	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	X	√	√	√	5	√	√	√	X	√	√	√	X
12	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	NC	X
13	√	√	√	√	√	√	√	√	X	X	X	X	√	X	√	16	6	√	√	√	√	√	√	√	X
14	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	16	8	2	√	4	√	√	√	X	X
15	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	16	18	4	4	√	√	√	X	X
16	√	√	√	√	√	√	√	√	X	X	X	X	√	√	NA	NA	NA	NA	NA	NA	X	√	√	NA	NA
17	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	8	12	7	√	√	√	√	X	X
18	X	X	X	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	7	√	√	√	X	√	√	√	X
19	√	√	√	√	√	√	√	√	X	X	X	X	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	X	X
20	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	X	√	√	√	X
21	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	X	√	√	√	√	√	√	4	√	√	√	√	√
22	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	6	√	√	√	√	√	√	√	√
23	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	36	√	4	1	√	6	√	√	√	√	X
24	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	4	2	1	√	√	X	√	X	NC	X
25	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	4	1	√	4	X	√	√	X	X

NA: no aplica. Alumno con dificultades de aprendizaje, al que se le piden sólo 3 ejercicios de los 7 propuestos

NC: no contesta. Respuestas en blanco por parte del alumno

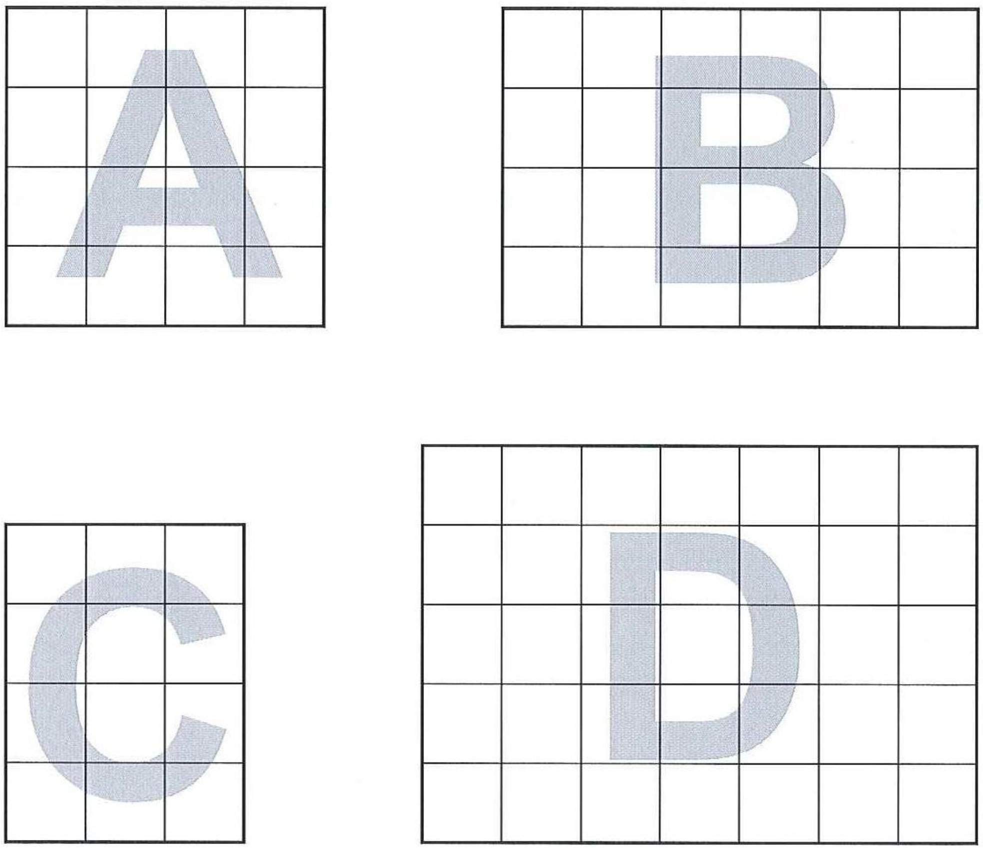
En el ejercicio 3, los números entre paréntesis corresponden a las respuestas correctas (el alumno debía encontrar 8 cuadrados de lado 1/2, 18 cuadrados de lado 1, etc). En la parrilla , hemos indicado el númerdo de cuadrados indicados por cada alumno en los casos en qué han contestado incorrectamente.

ANEXO 5.1): Actividad introductoria al geoplano: perímetros y áreas.

Squares and Rectangles

NAME ______________________

Measure the length and width of each square and rectangle below, and then calculate its area.



1. Using a ruler, draw a diagonal (from one corner to the opposite corner) on shapes A, B, and C.

2. Along the top edge of shape D, mark a point that is not a vertex. Using a ruler, draw a line from each bottom corner to the point you marked. (Three triangles should be formed.)

3. Cut out the shapes. Then, divide A, B, and C into two parts by cutting along the diagonal, and divide D into three parts by cutting along the lines you drew.

4. How do the areas of the resulting shapes compare to the area of the original shape?

ILLUMINATIONS
Resources for Teaching Math

ANEXO 5.2): Actividad para demostrar las fórmulas de áreas de polígonos.

ÀREES DE POLÍGONS AMB EL GEOPLÀ I RETALLANT PAPER

DESCRIPCIÓ DEL MATERIAL: Geoplà ortogonal, gomes, paper amb una trama quadriculada, estisores.

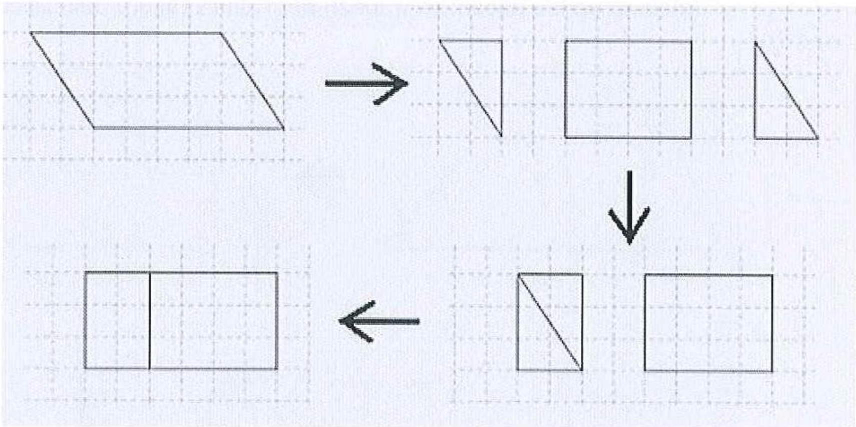
CONTINGUTS: Polígons, àrees, fórmules pel càlcul d'àrees, raonament visual.

PROPOSTA D'APLICACIÓ DIDÀCTICA: L'objectiu de la següent successió d'activitats consisteix a deduir experimentalment les fórmules de les àrees de diversos polígons a partir del geoplà ortogonal i de retallar paper quadriculat.

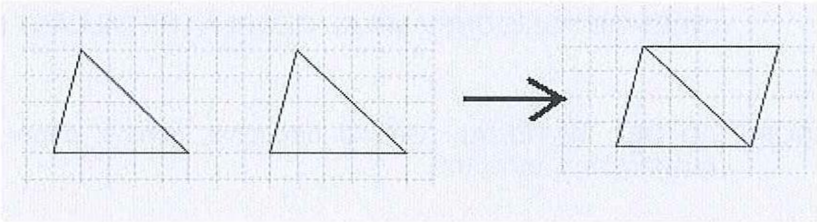
1. Quadrat: Construir diversos quadrats amb gomes elàstiques en el geoplà. En cada cas comptar el nombre de quadradets que conté i comparar-lo amb la longitud del costat, prenent com a unitat la distància entre dos claus consecutius d'una mateixa fila o columna. D'aquí sorgirà la idea que l'àrea és el quadrat del costat.

2. Rectangle: Construir diversos rectangles en el geoplà. En cada cas comptar el nombre de quadradets que conté i comparar-lo amb la longitud dels seus costats. Deduir que l'àrea és base per altura.

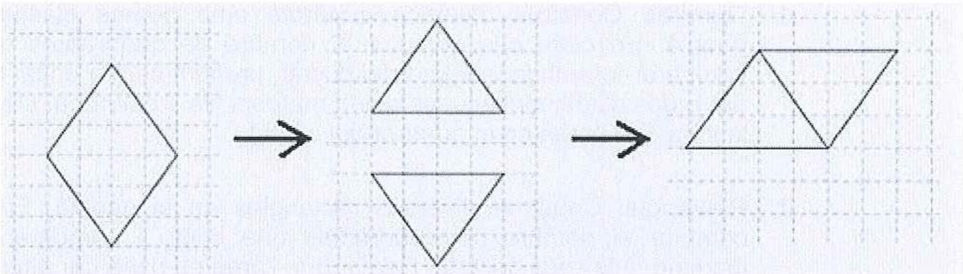
3. Paral·lelogram: Es pot deduir que l'àrea és base per altura comptant quadradets en el geoplà i també retallant paper (si es fa amb paper quadriculat resultarà més fàcil de tallar perpendicularment) com s'indica en la figura següent:



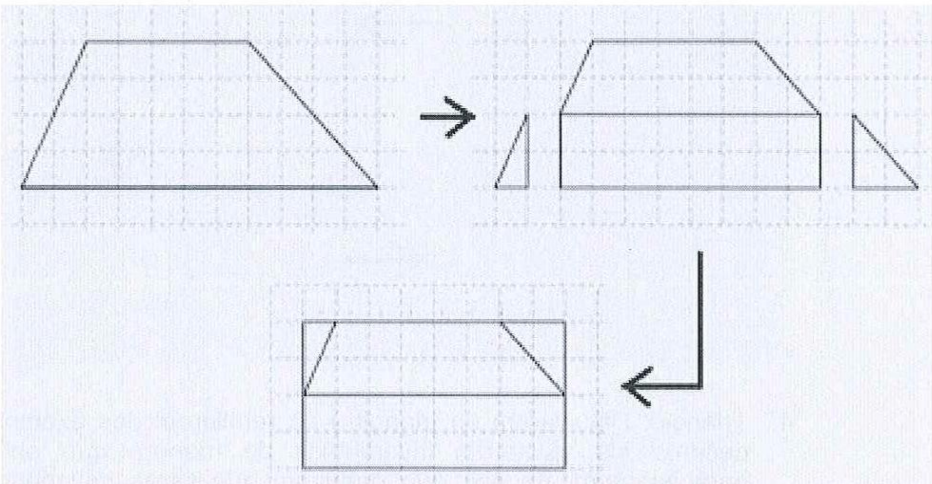
4. Triangle: Dibuixarem un triangle i en retallarem dos exemplars iguals, després els ajuntarem invertint-los de manera que obtindrem un paral·lelogram. És així que deduirem que l'àrea del triangle serà la meitat de la del paral·lelogram, la base i l'altura del qual coincideixen amb les del triangle.



5. Rombe: Dibuixem el rombe i el retallem per una de les diagonals formant dos triangles. Si ajuntem aquests triangles formant un paral·lelogram obtindrem que l'àrea del rombe serà l'àrea d'un paral·lelogram que té per base una diagonal i per altura la meitat de l'altre.

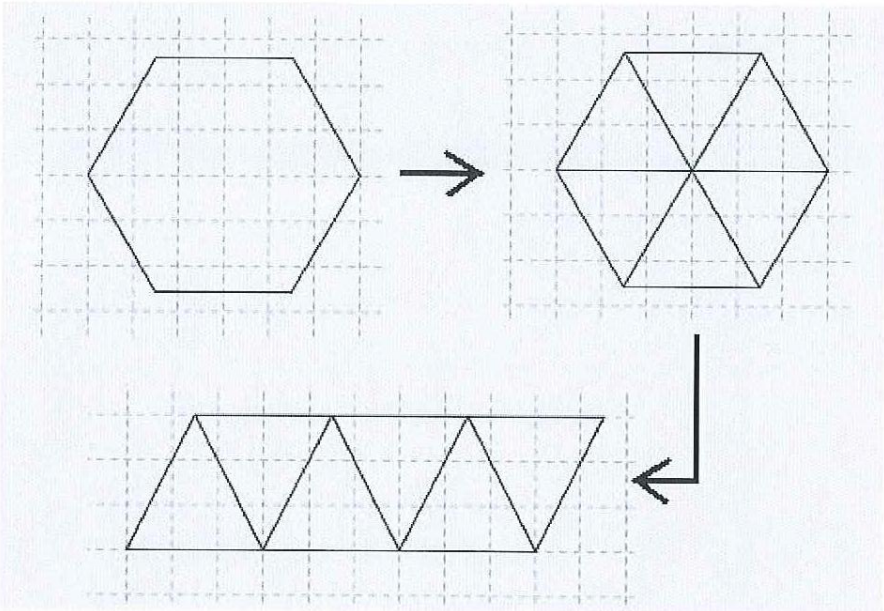


6. Trapezi: Dibuixem un trapezi, el retallem i el dobleguem per la meitat tot superposant les dues bases. La longitud de la línia central serà la mitjana de les longituds de les bases. Retallem els dos triangles que sobresurten d'aquesta línia, els girem 180º i els situem a la part superior del trapezi original. Obtenim un rectangle l'àrea del qual és la base (mitjana de les bases del trapezi) per l'altura (altura del trapezi).



7. Polígon regular qualsevol: Dibuixem el polígon, el retallem, fixem el seu

centre, tracem les línies que uneixen cada vèrtex amb el centre i retallem cadascun dels triangles iguals que es formen. En col·locar els triangles alternadament un al costat de l'altre com mostra la figura, obtenim un paral·lelogram l'àrea del qual, base per altura, és la meitat del perímetre del polígon per l'apotema. En el cas d'un polígon amb un nombre senar de costats és convenient tallar un dels triangles per l'altura i completar el paral·lelogram que formen els altres triangles fins a formar un rectangle la base del qual continua essent la meitat del perímetre del polígon.



CONNEXIONS: Educació visual i plàstica.

ALTRES COMENTARIS: Cada parella d'alumnes construirà els seus polígons escollint lliurement les dimensions i, segons el cas, la forma concreta. Això donarà generalitat als resultats que s'obtinguin. Per evitar que els retalls de paper dels diferents grups es barregin pot anar bé usar paper de diferents colors entre grups propers. En cada cas, un cop deduïda la fórmula de l'àrea, convindrà prendre mesures en centímetres i fer el càlcul concret. Després podrem comprovar el resultat comptant el nombre de quadres d'un centímetre de costat que caben en el polígon. Per això pot ser convenient tenir una quadrícula sobre transparència que pugui superposar-se als polígons. Al final convé que l'alumne/a elabori una llista amb les fórmules deduïdes. Tinguis en compte que hem dedicat la fitxa F37 a fer una introducció al geoplà. Cal posar atenció en l'ús de les tisores.

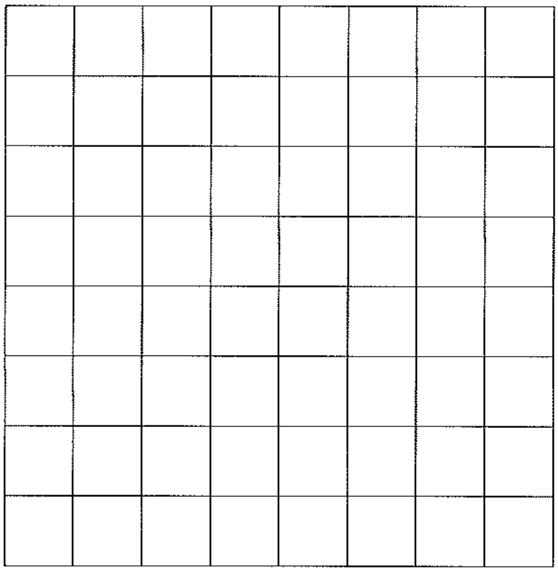
Aquest element pertany a una Llicència d'Estudis realitzada pel Departament d'Ensenyament durant el curs 2005-2006, titulada *Recursos materials i activitats experimentals en l'educació matemàtica a secundària.*

ANEXO 6): Experiencia de aula: Ficha Actividad Alumno.

Fitxa Alumne Experiència d'Aula
Geometria 2on ESO
Professora en pràctiques: Marta Roca
Data: Maig 2014

1) Activitat geopla-papiroflexia

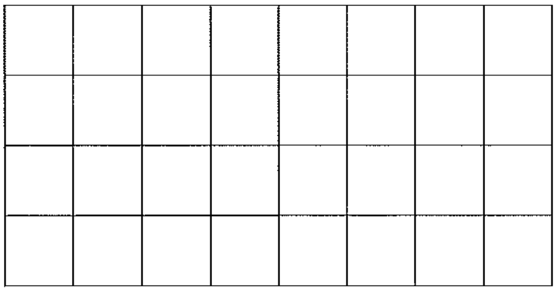
Tenim un quadrat de costat 8 (unitats)



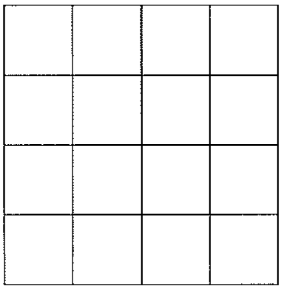
Quin és el seu perímetre (en les unitats definides)?
I la seva àrea?

Dibuixa la diagonal del quadrat i plega'l per la meitat: quin polígon obtens?
Quina és l'àrea d'aquest polígon?. I el seu perímetre?
Compara l'àrea del quadrat inicial amb l'àrea d'un dels dos triangles obtinguts: quina relació hi trobes?.

Ara plega el quadrat inicial per la meitat, horitzontal o verticalment: quin polígon obtens?
Quin és el perímetre de cadascun dels rectangles obtinguts?
Compara aquest perímetre amb el perímetre del quadrat inicial: quina relació hi ha?
Quina és l'àrea de cadascun dels rectangles obtinguts?
Compara aquesta àrea amb l'àrea del quadrat inicial: quina relació hi ha?



Torna a plegar el rectangle per la meitat, de manera que obtinguis dos quadrats de cadascun dels rectangles; és a dir, quatre sub-quadrats del quadrat inicial.
Compara el perímetre d'aquest quadrat més petit amb el del quadrat inicial: quina relació hi ha?
Compara també l'àrea d'aquest quadrat més petit amb la del quadrat inicial: quina relació hi ha?



Anota les teves conclusions.

Nota: totes aquestes accions es podrien també dur a terme si, enlloc de plegar el paper original que os hem facilitat, anéssim seguint les instruccions retallant amb estisores la figura inicial.

2) Demostració visual del Teorema de Pitàgores.

Figura 1

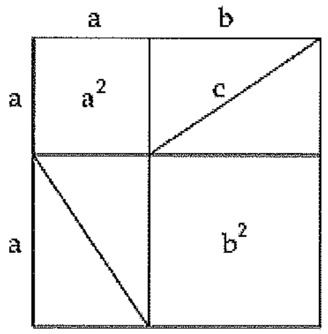
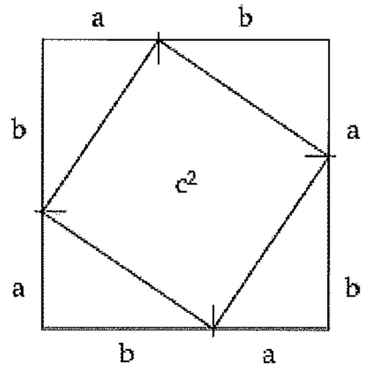


Figura 2

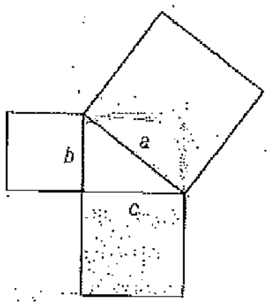


$$a^2 + b^2 = c^2$$

Donades aquestes dues figures 1 i 2, l'àrea de les quals és la mateixa, raona en primer lloc si els 4 triangles dibuixats en cadascuna d'elles són iguals entre sí. Després, raona també si els 4 triangles de la figura 1 són iguals als de la figura 2.

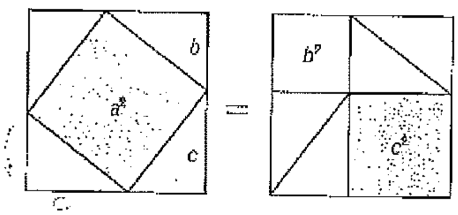
A continuació, marca o pinta els 4 triangles iguals de cadascuna de les figures.
Si les àrees dels quadrats inicials (figures 1 i 2) són iguals, i les zones marcades també són iguals, quina ha de ser la relació entre les zones sobrants? Tingues en compte que a la figura 1 queden sense marcar: $a^2 + b^2$, mentre que a la figura 2 queda sense marcar c^2.

Justificació formal :



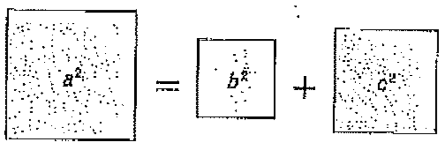
Comprovem el teorema de Pitàgores gràficament: si utilitzem els costats d'un triangle rectangle, podem construir tres quadrats que tenen els costats iguals que els costats del triangle rectangle.

Al quadrat de costat a hi afegim quatre triangles rectangles iguals fins que formem un altre quadrat.



Als quadrats de costats *b* i *c* hi afegim quatre triangles rectangles fins que formem un quadrat.

Com que els quatre triangles rectangles de cada membre són idèntics, quan els eliminem la igualtat es manté.



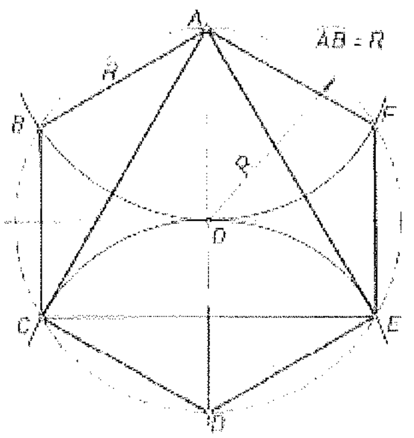
3) Construcció geomètrica d'un hexàgon regular.

Construïu per parelles, utilitzant regle i compàs, un hexàgon regular de costat 4 cm. Recorda que l'hexàgon regular és l'únic polígon on es compleix que la mesura del radi és la mateixa que la del costat.

Per tant, en primer lloc haureu de construir una circumferència de costat 4 cm, i sobre el seu perímetre anar marcant amb la mateixa obertura de compàs (4 cm) els sis punts de tall del hexàgon amb la circumferència, que seran els 6 vèrtexs del hexàgon regular. Amb un regle, traceu els segments que uneixen aquests 6 vèrtexs, que seran els 6 costats de l'hexàgon.

Un cop retallat, aneu plegant l'hexàgon en base als possibles eixos de simetria: quins polígons trobeu? Per exemple, plegant per la meitat, s'obtenen dos trapezis isòsceles iguals; si pleguem un altre cop per la meitat, obtenim 4 trapezis rectangles iguals.

Torneu a desplegar el hexàgon, i mireu de esbrinar quants triangles el formen. Per ajudar-vos, podeu traçar les seves diagonals, i anar plegant l'hexàgon per aquestes. Quants triangles iguals queden? Com són aquests triangles?



Recordeu que havíem comentat que un hexàgon regular està format per sis triangles equilàters (en aquest cas de 4 cm de costat) i que, per tant, cadascun dels angles centrals mesura 60º. Recordem que calculàvem també l'angle central dividint 360º entre els 6 costats del hexàgon, arribant a aquest 60º. També podríem verificar-ho mesurant amb el transportador d'angles.

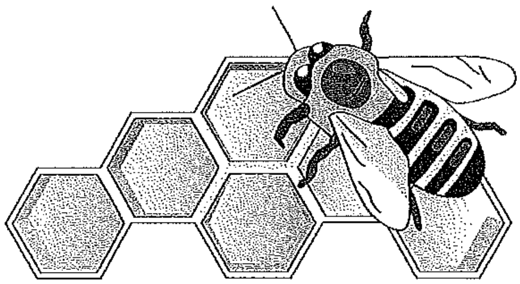
A més a més, cada angle interior mesura 120º doncs cadascun d'ells abasta dos angles consecutius de 60º cadascun. Recordeu que també podíem calcular cada angle interior multiplicant 180º pel nombre de triangles que trobem al dibuixar totes les diagonals possibles des d'un vèrtex qualsevol a la resta de vèrtexs no consecutius (en aquest cas, 4 triangles), de manera que la suma dels angles interiors és de 720º i, per tant, cada angle interior mesura 120º. També podríem verificar-ho mesurant amb el transportador d'angles.

Finalment, retalleu els 6 triangles equilàters sobreposats plegats pel costat oposat al vèrtex, en paral.lel al costat. Al desplegar la figura, constatar que es manté l'hexàgon regular, només que el radi i el costat del hexàgon han minvat en proporció a si hem fet el tall més a prop o més lluny del vèrtex. I lògicament es mantenen totes les propietats de l'angle central i interior d'un hexàgon regular.

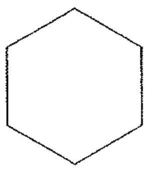
Aquesta activitat és aplicable a qualsevol mida de radi o costat del hexàgon.

4) Activitat complementària sobre un hexàgon regular : « el enjambre » (el rusc).

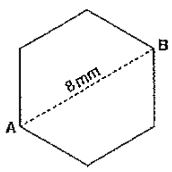
Les abelles construeixen el rusc formant nombroses cel·les hexagonals.



1 Dibuixa els dos triangles equilàters que es formen quan uneixes tres vèrtexs de l'hexàgon.

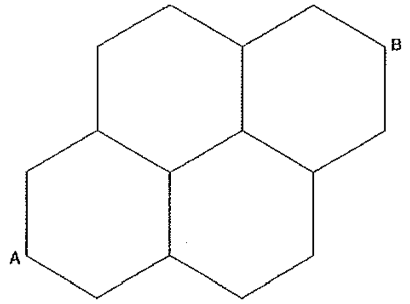


2 Si les cel·les hexagonals que construeixen les abelles mesuren 8 mm de diagonal (distància entre e
punts A i B), quant mesura un costat de l'hexàgon?



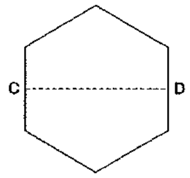
Resposta: .... mm

3 Si continuem considerant les cel·les hexagonals del nostre rusc, quina distància hi ha entre els punts A i B?



Resposta:........................ mm

4 Si els punts C i D estan situats al mig d'aquests dos costats de l'hexàgon de la cel·la,



4.1. la distància entre els punts C i D és:

- **a.** Menys de 8 mm. ☐
- **b.** Igual a 8 mm. ☐
- **c.** Més de 8 mm. ☐

4.2. Explica la teva resposta a l'apartat anterior (4.1.).

....

....

ANEXO 7): Encuesta final alumnos.

Enquesta final per alumnes de 2on ESO d'avaluació practiques Marta Roca

1)Activitats extraordinàries (proVa inicial, experiència d'aula i proba final)

a) Grau de satisfacció:

Què és el que més t'ha agradat de les activitats dutes a terme?

T'agradaria repetir més sovint activitats com aquestes proposades? Per què ?

b) Aprenentatge i utilitat de futur :

Creus que t'han estat útils aquestes activitats per reforçar els continguts de classe ?

Creus que et poden haver ajudat a superar possibles dificultats en l'aprenentatge de la geometria ?

Creus que et poden haver servit com a base per a cursos següents, formació posterior i vida quotidiana ?

2)Impartició dels continguts per part de la Marta Roca (Unitat didàctica)

Punts forts a destacar:

Punts febles a destacar:

Aspectes de millora:

ANEXO 8): **Cuadros de competencias básicas.**

(*)Competències bàsiques dins de l'àmbit matemàtic			
Resolució de problemes	Competència 1	C1	Traduir un problema a llenguatge matemàtic o a una representació matemàtica utilitzant variables, símbols, diagrames i models adequats.
	Competència 2	C2	Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes.
	Competència 3	C3	Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema assajant estratègies diverses.
	Competència 4	C4	Generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes.
Raonament i prova	Competència 5	C5	Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques.
	Competència 6	C6	Emprar el raonament matemàtic en entorns no matemàtics.
Connexions	Competència 7	C7	Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i per raonar.
	Competència 8	C8	Identificar les matemàtiques implicades en situacions properes i acadèmiques i cercar situacions que es puguin relacionar amb idees matemàtiques concretes.
Comunicació i representació	Competència 9	C9	Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic.
	Competència 10	C10	Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió i comprendre les dels altres.
	Competència 11	C11	Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir coneixement a partir d'idees matemàtiques.
	Competència 12	C12	Seleccionar i usar tecnologies diverses per gestionar i mostrar informació, i visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics.

(*)Competències bàsiques per la ESO	
Les competències comunicatives	**Les competències personals**
1. Competències. comunicativa lingüística i audiovisual	6. Competència d'autonomia i iniciativa personal
2. Competències artística i cultural	**Competències específiques centrades en conviure i habitar el món**
Les competències metodològiques	7. Competència en el coneixement i la interacció amb el món físic.
3. Tractament de la informació i competència digital	8. Competència social i ciutadana.
4. Competència matemàtica	
5. Competència d'aprendre a aprendre	

Fuente cuadro 1 (Competencias básicas dentro del ámbito matemático): **véase [13]**

Fuente cuadro 2 (Competencias básicas para la ESO): **véase [6] y [12].**

ANEXO 9): **Cuadro resumen de mi unidad didáctica (UD) impartida.**

GRUP CLASSE	ÀREES/MATÈRIES	DURACIÓ	PERÍODE	CURS ESCOLAR	PROFESSORA
2on ESO	Matemàtiques	25 sessions	2on quadrimestre	2013-2014	Marta Roca

TÍTOL	JUSTIFICACIÓ DE LA UNITAT	Pes sobre nota global
Lloc geomètrics i figures planes(geometria euclidiana)	Base per l'aprenentatge de cossos geomètrics (figures a l'espai i volums), semblança i trigonometria, que s'estudien a 3er y 4rt d' ESO. Base per la geometria analítica (àlgebra: equacions i funcions) i vectorial. També és una eina per a resoldre problemes de la vida quotidiana (tema angles i càlcul de perímetres i àrees).	Té un pes del 50% sobre la nota global

CONTINGUTS D'APRENENTATGE	OBJECTIUS D'APRENENTATGE	(*)COMP. Bàsiques	CRITERIS D'AVALUACIÓ	
a. Angles i rectes **a1**. Posicions relatives de dues rectes en el pla **a2**. Classificació i posició relativa de dos angles **b**. Polígons i circumferència. **b1**. Classificació i suma d'angles interiors de polígons **b2**. Punts notables triangle **b3**. Quadrilàters **b4**. Circumferència i polígons regulars inscrits **c**. Figures planes i àrees. **c1**. T. Pitàgoras i aplicacions **c2**. Àrees de polígons	Analitzar les característiques i propietats de figures geomètriques de 2 dimensions i desenvolupar raonaments sobre relacions geomètriques.	**C5, C8** **4, 5, 6, 7**	**1**	Diferenciar i classificar polígons segons nombre de costats i calcular la suma dels seus angles interns.
			2	Classificar triangles segons els seus costats i angles.
			3	Esbrinar si donats 3 costats qualsevols, aquests poden formar o no un triangle (relació entre costats d'un triangle).
			4	Aplicar la propietat bàsica de la suma d'angles d'un triangle per calcular el valor d'algun angle faltant.
	Dibuixar objectes geomètrics a partir de dades (longituds i angles), mitjançant instruments de dibuix (regle, escaire, compàs i transportador).	**C1, C8, C10** **1,2,4,5,6,7**	**5**	Dibuixar les rectes i punts notables d'un triangle i les circumferències que se'n deriven (inscrita i circumscrita).
			6	Dibuixar i explicar les posicions relatives de dues rectes en el pla.
	Analitzar les propietats d'angles en determinades posicions relatives	**C8** **4, 5, 6, 7**	**7**	Aplicar les propietats dels angles complementaris, suplementaris i oposats pel vèrtex per calcular valors d' angles de quadrilàters.
	Aplicar el Teorema de Pitàgoras en la resolució de problemes relatius a l'obtenció de mesures.	**C1, C2, C7, C8** **4,6**	**8**	Calcular el costat d'un rombe si coneixem les seves diagonals
			9	Calcular l'altura d'un triangle si coneixem els seus costats
			10	Calcular l'apotema d'un polígon regular donats el costat i el radi (cas especial del hexàgon)
			11	Calcular l'altura d'un trapezi si coneixem les dues bases i un dels costats, o d'un romboide si coneixem els seus costats.
	Representar figures planes en la resolució de problemes d'àrees i resoldre'ls utilitzant la unitat de mesura adequada.	**C1, C2, C7, C8** **1,2,4,5,6,7**	**12**	Determinar l'àrea de polígons regulars (ex: trapezi).
			13	Utilitzar la mesura adequada per les àrees (unitats al quadrat)
	Descomposició de figures planes en d'altres conegudes per el càlcul de la seva àrea o perímetre.	**C2, C3, C7, C8** **1,2,4,5,6,7**	**14**	Calcular perímetres i àrees de figures composades per polígons regulars (exemple: estrella de 6 punxes)