



Màster universitari en **Formació del Professorat d'Educació Secundària
Obligatòria i Batxillerat, Formació Professional i Ensenyament d'Idiomes**

Treball de fi de màster

Títol: **Dificultades de aprendizaje de la geometría por parte de alumnos del primer ciclo de la ESO.**

Cognoms: Roca Cuffí

Nom: Marta

Titulació: Màster en Formació del Professorat d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat, Formació Professional i Ensenyament d'Idiomes

Especialitat: Matemáticas

Director/a: Maria Alberich Carramiñana

Data de lectura: 25 de junio de 2014

INDICE

1) INTRODUCCIÓN	3
2) DIFICULTADES DE APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA	5
2.1) Resultados obtenidos por alumnos de ESO en pruebas de geometría.....	5
2.2) Dificultades actuales de los alumnos en el aprendizaje de la geometría.....	6
2.3) Documento base de trabajo: “Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales”.....	8
3) ANÁLISIS PRUEBAS DIAGNÓSTICAS GENERALITAT EN GEOMETRÍA	11
3.1) Introducción pruebas diagnósticas.....	11
3.2) Descripción pruebas diagnósticas matemáticas.....	11
3.3) Análisis pruebas diagnósticas de geometría.....	12
3.4) Conclusiones y crítica constructiva.....	17
4) ANÁLISIS DIFICULTADES REALES ALUMNOS PRIMER CICLO ESO	18
4.1) Descripción de la optativa de geometría en el centro donde he realizado mis prácticas de máster.....	18
4.2) Primeras impresiones durante el período de observación.....	19
4.3) Propuesta del plan de acción.....	21
4.4) Diseño de las pruebas diagnósticas inicial y final.....	22
4.4.1) Nivel global de percepción visual.....	24
4.4.2) Nivel constitutivo de percepción visual.....	25
4.4.3) Nivel operativo de percepción visual.....	26
4.4.4) Proceso de justificación.....	27
4.5) Indicadores diseñados y utilizados para la corrección de las pruebas.....	28
4.6) Experiencia de aula llevada a cabo antes de la prueba final.....	29
4.7) Comparativa de resultados iniciales y finales.....	32
4.7.1) Evaluación resultados prueba inicial.....	33
4.7.2) Evaluación resultados prueba final.....	37
4.7.3) Comparativa resultados pruebas inicial y final.....	41
4.8) Conclusiones, crítica constructiva y valoración por parte de los alumnos.....	44
5) CONCLUSIONES GENERALES Y RECOMENDACIONES	49
5.1) Orientaciones para la impartición de la geometría en el aula.....	50
5.2) Conclusiones generales.....	51
6) BIBLIOGRAFÍA Y WEBGRAFÍA	53

1)INTRODUCCIÓN.

Todos conocemos los preocupantes resultados que nuestros alumnos están obteniendo en todas las pruebas diagnósticas o de evaluación de matemáticas a las que se enfrentan, y más en concreto en el área de geometría (llamada también Espacio y Forma). No sólo estamos hablando de las mundialmente conocidas como pruebas PISA, sino también a las pruebas de competencias que la “Generalitat de Catalunya” lleva a cabo en varios cursos de la educación obligatoria.

Estos malos resultados provienen de las dificultades de aprendizaje en geometría por parte de nuestros alumnos, tal y como hemos analizado en alguna de las asignaturas de este máster. Así lo he podido constatar durante mis prácticas de observación en el aula de la materia cuatrimestral de geometría en el centro asignado, durante el primer cuatrimestre del curso 2013-14, con alumnos que cursan 2º de la ESO.

Todo ello me llevó a pensar que podía basar mi Trabajo Final de Máster (TFM) en este complejo asunto, aprovechando por otro lado la impartición de mi unidad didáctica (UD) en esta materia de geometría durante el segundo cuatrimestre del presente curso (unas 25 horas en total, repartidas en 3 meses), también a alumnos de 2º de la ESO. Así surgió mi idea de este TFM, centrándome en unas hipótesis de investigación de partida (que detallaré en el punto 4.3) de este trabajo), con el principal objetivo de medir estas dificultades en el aprendizaje de la geometría y el propósito de incidir para ayudar a nuestros alumnos a minimizarlas o superarlas.

Para establecer mis hipótesis de investigación de partida me he basado en un interesante documento elaborado por el Ministerio de Educación Nacional de la República de Colombia, titulado “Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales”, que centra el aprendizaje de la geometría en tres procesos: visualización, justificación y construcción geométrica como nexo entre los dos primeros.

Para medir estas dificultades, se han diseñado unos ejercicios y unos indicadores que permiten cuantificar estas dificultades en cada uno de estos procesos de conceptualización de la Geometría. Estos ejercicios se han experimentado con nuestros alumnos en forma de pruebas inicial y final (al principio y al final de mi impartición de la UD), lo que nos ha permitido llevar a cabo una comparativa entre los resultados obtenidos en ambas pruebas, cuantificados mediante los indicadores diseñados en paralelo al diseño de los ejercicios. Estos indicadores nos han permitido detectar al mismo tiempo en qué fases se encallan nuestros alumnos.

También se ha diseñado y ejecutado una acción entre las dos pruebas, de una hora de duración, para intentar incidir en el aprendizaje de geometría por parte de los alumnos y ayudarles a detectar y solventar sus dificultades de aprendizaje. Con esta misma finalidad, he realizado otras acciones puntuales durante la impartición de mi UD.

Hemos concluido nuestra investigación con unas recomendaciones a tener en cuenta en trabajo dentro del aula, que permitan minimizar estas dificultades. De esta forma, logramos que nuestros alumnos dispongan de más armas para afrontarlas por un lado, y de una base geométrica más sólida para afrontar futuros retos geométricos por otro lado

(no sólo durante su etapa académica, sino también a lo largo de toda su vida, en cualquier situación de la vida cotidiana). De forma simultánea, aunque no prioritaria, deberíamos conseguir una mejora en los resultados de geometría de las pruebas externas a las que se enfrentan nuestros alumnos a lo largo de su vida escolar.

Como veremos en el apartado de conclusiones de este trabajo, hemos demostrado con nuestra investigación (diseño de pruebas y de acciones ejecutadas en el aula) que se cumplen nuestras hipótesis de partida, y que, por tanto, podemos incidir en nuestros alumnos para minimizar sus dificultades de aprendizaje en geometría. En consecuencia, las técnicas y habilidades de percepción visual se aprenden (podemos educar a nuestros alumnos en la visualización) y articular estos procesos de visualización con los de justificación mediante la construcción geométrica y las actividades manipulativas derivadas de ésta.

A modo de ilustración, se han analizado algunas pruebas diagnósticas referentes a la unidad de “Espacio y Forma” que la Generalitat de Catalunya lleva a cabo en el área de matemática en alumnos que acaban de comenzar a cursar 3º de la ESO, y se han estudiado qué procesos de conceptualización están implícitos para su correcta resolución, identificando al mismo tiempo posibles dificultades para los alumnos.

2) DIFICULTADES DE APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA.

2.1) Resultados obtenidos por alumnos de ESO en pruebas de geometría.

Como ya analizamos en las asignaturas del curso pasado de “Innovación docente” y de “Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas” (en la parte de Espacio y Forma), nuestros alumnos obtienen pésimos resultados en las pruebas externas de geometría a las que se enfrentan.

En este trabajo no entraremos en detalle en las **pruebas PISA** (Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos) que se hacen a nivel mundial a los alumnos de 15 años de los países de la OCDE y países asociados, pero sí debemos comentar los resultados que obtuvo España en las pruebas llevadas a cabo en 2012 y cuyos resultados se conocieron en diciembre de 2013. En esta última edición las pruebas se centraron en las matemáticas, de forma que dos terceras partes (66%) del examen (una hora y veinte minutos) se dedicaron a matemáticas (por los veinte minutos a lectura y otros veinte minutos a ciencias). La puntuación que alcanza España en matemáticas es de 484 puntos, significativamente inferior al promedio de la OCDE de 494 puntos (en Cataluña es de 493, muy próxima a la media). En el listado ordenado de los 34 países miembros de la OCDE (sobre los 65 países que participaron en total), España ocupa el puesto 25. Por otra parte, apenas el 8% de alumnos españoles alcanza los niveles altos de rendimiento en matemáticas, lo que supone 5 puntos menos que el promedio de la OCDE; este resultado indica una proporción baja de alumnos excelentes. En el extremo opuesto, el 24% de los alumnos se encuentra en el nivel bajo de rendimiento en matemáticas o no lo alcanza, lo que indica que uno de cada cuatro alumnos españoles no posee un dominio básico de la competencia matemática (no obstante, este resultado es muy similar al del promedio de los países de la OCDE, del 23%). Además, no se han producido cambios significativos en los resultados de España en matemáticas entre 2003 y 2012, ediciones en las que las matemáticas han sido el foco de especial atención de la evaluación PISA, lo cual da mucho que pensar puesto que ello significa que en casi una década no hemos sido capaces de dar la vuelta a estos resultados.

La mayor dedicación a matemáticas en PISA 2012 permite que se proporcionen resultados para 4 dominios de esta competencia para la totalidad de los países participantes (siendo el promedio de la OCDE los 494 puntos, como hemos visto anteriormente): cantidad (491 puntos); cambio y relaciones (482 puntos); espacio y forma (477 puntos); e incertidumbre y datos (487 puntos) (**véase [1]**). Constatamos pues que la geometría se lleva la peor parte, y de largo, como habíamos comentado anteriormente.

Por otro lado los alumnos se enfrentan a las pruebas que la Generalitat de Catalunya lleva a cabo durante la educación obligatoria: pruebas de evaluación que se realizan en 4º de la ESO, y pruebas diagnósticas que se realizan en 6º de primaria y en 3º de la ESO. Nosotros nos centraremos en estas últimas, pues que son las que evalúan las competencias matemáticas adquiridas por nuestros alumnos durante el primer ciclo de la ESO, que es precisamente donde está emplazada la materia de geometría en la que he impartido mis clases prácticas (en concreto, en 2º de la ESO). Por tanto, nos centraremos en las **pruebas diagnósticas que los alumnos de 3º de la ESO realizan** a principios de

curso. Desarrollaremos este tema en el punto 3) de este trabajo, pero nos gustaría en este apartado echar un vistazo a los resultados que se obtienen de estas pruebas a nivel de Cataluña. Dado que la evaluación diagnóstica es una evaluación interna de centro, y no se trabajan los datos del conjunto de Cataluña, no podemos obtener datos sobre los resultados obtenidos en matemáticas, y menos aún en geometría. Pero sí tenemos información de los resultados de las pruebas de evaluación que se hicieron en 4º de la ESO durante el curso 2012-13, puesto que en estas pruebas sí que el “Consell Superior d’Avaluació del Sistema Educatiu” (CSASE) lleva a cabo una comparativa a nivel de Cataluña. Si bien hay una ligera mejora en la consecución de la competencia matemática respecto al curso anterior, con un promedio del 68.3% (frente al 64% del curso anterior), también la geometría sale mal parada en estas pruebas, puesto que la nota media es la más baja de las 5 áreas (no llega al 61%, frente al 75% de cambio y relaciones o al 69% de estadística); además, es la que presenta un mayor porcentaje de alumnos en el nivel bajo (casi un 33%, cuando la media de nivel bajo de las 5 áreas es del 21%)(véase [2]).

De hecho, a raíz de los malos resultados que se obtuvieron en la primera edición de estas pruebas en el curso 2011-12, el *Departament de Ensenyament de la Generalitat de Catalunya* emitió un documento en junio 2012 titulado: “Orientaciones para la mejora del aprendizaje de la geometría” con la finalidad de ayudar a los centros docentes a la hora de trabajar la geometría en la materia de matemáticas, pero también en otras materias como las ciencias naturales, las ciencias sociales o la educación física, entre otras. Este documento también lo hemos usado como referencia en este trabajo (véase [3]).

Analizando los resultados de ambas pruebas (que son las únicas pruebas externas que tenemos de referencia en cursos de la ESO), queda patente el bajo nivel de geometría que tienen nuestros alumnos, nivel que arrastramos ya desde hace años.

2.2) Dificultades actuales de los alumnos en el aprendizaje de la geometría.

Tras constatar los malos resultados históricos que obtienen nuestros alumnos de la ESO en pruebas externas de geometría, vamos a detallar a continuación cuáles son las posibles causas. Tras un debate que mantuvimos el curso pasado en la asignatura de “Innovación docente” del máster, en el que partimos de opiniones y comentarios de profesores de matemáticas en activo al respecto, al que añadimos a posteriori nuestras aportaciones personales, puedo concluir lo siguiente:

- una de las causas más compartidas por los docentes de general es que la geometría es una materia que se suele dejar para el final de curso, sobretodo en 2º y 3º de la ESO, donde el tema estrella de matemáticas son las ecuaciones; esta causa no debería servir de excusa en mi caso (al menos para 2º de la ESO), puesto que en el centro donde he cursado mis prácticas del máster, que la geometría es una materia independiente al resto de áreas de matemáticas, que se imparte de forma cuatrimestral y en grupos reducidos, como veremos en el punto 4) de este trabajo.

- otra de las causas parecer ser la redacción de las pruebas, sobretodo en cuanto a la forma se refiere (redacción de enunciados o dibujos/figuras dados), que en ocasiones puede en ocasiones llevar a confusiones por parte de los alumnos. En el punto 3) analizaremos en detalle las pruebas diagnósticas matemáticas llevadas a cabo en las 4 ediciones que ha habido hasta el presente curso (2013-14), en cuanto al área de geometría concierne.
- también se comenta una falta de comprensión lectora por parte de los alumnos, que en ocasiones puede dificultar la correcta comprensión del enunciado del problema o qué les pide exactamente. En este aspecto, hay que fomentar la lectura que es uno de los principales motivos de fracaso escolar. Y se trata no sólo de hacerlo a nivel escolar (muchas escuelas ya llevan a cabo proyectos de impulso de la lectura), sino a nivel familiar y social (dar ejemplo y animar a nuestros hijos/niños a que lean ya desde muy pequeños).
- la falta de visión espacial también es vista por los profesores como una dificultad, que tiene su base en la percepción visual (difícilmente nuestros alumnos tendrán visión espacial si antes fallan en procesos más básicos como la visualización). En el apartado siguiente 2.2) analizaremos la interacción entre los procesos de visualización y de justificación, y cómo la construcción geométrica permite superar el conflicto entre ambos.
- percibimos a nuestros alumnos como reacios a pensar, que buscan el camino más fácil con tal de resolver el problema (pensar lo menos posible). En términos generales, prefieren empollarse una fórmula, aplicarla y listos, antes que pararse medio minuto a releer el enunciado y pensar en lo que se les pide antes de empezar a escribir. Y precisamente la geometría exige una mayor capacidad de abstracción, y menos procedimientos mecánicos, que obligan al alumno a una mayor dedicación. En este sentido, creo personalmente que hoy en día hay una inmediatez exagerada, sobre todo entre los adolescentes que lo quieren todo ya. Deberíamos entre todos tratar de fomentar valores tradicionales como la paciencia, la espera, la serenidad, el esfuerzo, el sacrificio o el sentido común, y enseñarles a controlar sus impulsos y a soportar la frustración.
- finalmente los profesores comentan una falta generalizada de motivación, sobretodo en materias como las matemáticas. En este sentido, deberíamos impartir la materia de una forma más dinámica, fomentando los retos matemáticos, las tecnologías de la información y el trabajo cooperativo en la medida de lo posible. También deberíamos introducir algo de historia en las matemáticas, para que nuestros alumnos se sitúen en el contexto y puedan establecer conexiones con otras materias de forma transversal; para ello podríamos proponer presentaciones orales por grupos. Y por último llevar a cabo alguna salida cultural que motive a nuestros alumnos.

Es importante constatar que 4 de las 6 causas consideradas como más importantes por parte de los profesores en cuanto a las dificultades que encuentran nuestros alumnos en el aprendizaje de la geometría, competen directamente a los alumnos (todas excepto las dos primeras). Por tanto, tenemos mucho que hacer como docentes, pues son causas

que podemos corregir con nuestras acciones dentro del aula. Pero no aisladamente, sino en colaboración con el resto de profesores de matemáticas, con el resto de profesores de otras materias (artes plásticas, ciencias naturales, ciencias sociales, etc) y con el centro en el que trabajamos (el impulso a la lectura es una asignatura pendiente por parte de todos).

2.3) Documento base de trabajo: “Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales”.

Tal y como hemos comentado en la Introducción de este trabajo, y a raíz de la constatación de las dificultades que encuentran nuestros alumnos en el aprendizaje de la geometría, como así lo demuestran los resultados de las pruebas externas a las que se someten, mi tutora de TFM me sugirió este documento elaborado por el Ministerio de Educación Nacional de la República de Colombia, titulado: “Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales”, cuya primera edición está fechada en abril 2004.

Se trata de un documento muy rico y profundo en cuanto a contenidos, puesto que se fundamenta en otros muchos y muy variados autores, como podemos constatar en su extensa bibliografía.

La situación de partida de nuestro TFM es el capítulo 3 del citado documento, “El aprendizaje de la geometría” (ver **Anexo 1**), en el que se analizan las dificultades que podemos encontrarnos en cada uno de los procesos que componen el aprendizaje de la geometría y en su interacción: procesos de visualización, procesos de justificación y **procesos de construcción geométrica, como encadenamiento “natural” de los procesos de visualización (ligados al pensamiento espacial) y los procesos de justificación (ligados al pensamiento deductivo)**. La interacción entre estos procesos dará lugar a un cierto desarrollo del conocimiento geométrico.

El aprendizaje de la geometría es un proceso completo que pone en tensión ciertos polos del desarrollo cognitivo: los procesos de dar significado a los objetos y propiedades geométricas (procesos de visualización) y los procesos de generalización y abstracción que dan lugar a la descontextualización de dichos objetos (procesos de justificación). El modo en qué se desarrolle esta tensión será la plataforma de lanzamiento hacia el desarrollo teórico del ámbito matemático (**véase [4]**). Dicho con otras palabras, el mayor o menor éxito por parte de los alumnos en el aprendizaje de la geometría constituirá su base de conocimiento matemático y condicionará su aprendizaje matemático futuro.

No trataremos la fase posterior de modelización geométrica puesto que no es objeto de nuestro estudio: nuestros alumnos de 2º de la ESO no están aún preparados para ello; acaban de iniciarse en la geometría euclidiana, y tan sólo parten de las nociones básicas que han aprendido durante la educación primaria.

a) Procesos de visualización: requieren superar las dificultades asociadas a las condiciones fisiológicas propias de la percepción visual (qué percibimos al ver un dibujo). Se trata de que el alumno vaya evolucionando en la “forma de mirar” los objetos, desde simples percepciones visuales hasta el nivel heurístico de la visualización (encontrar la

reorganización efectiva de entre varias configuraciones posibles). Debemos diferenciar entre sus tres niveles, de menor a mayor complejidad:

- nivel global de percepción visual: asociar una figura representada a una figura geométrica y a su vez a objetos físicos. Un ejemplo sería asociar  a un hexágono, y éste a una celda de un enjambre. En este nivel predominan la posición (el fenómeno de la gravedad hace que tendamos a colocar las figuras con la base abajo), la orientación (las relaciones de paralelismo y perpendicularidad son más fácilmente reconocibles cuando tienen orientación horizontal o vertical), o el tipo de trazo (grosso, delgado).
- nivel constitutivo de percepción visual: la imagen se percibe como constituida por elementos de una misma dimensión o dimensiones inferiores, y hay que identificar también las relaciones entre estos elementos. En el caso que nos ocupa (figuras geométricas planas, por ejemplo un triángulo ), la imagen bidimensional se verá como formada por figuras bidimensionales (el propio triángulo), unidimensionales (segmentos o lados del triángulo) o de dimensión cero (puntos o vértices del mismo), y habrá que identificar las relaciones entre éstos para clasificar el triángulo según sus lados y sus ángulos (ejemplo: isósceles y rectángulo). En imágenes complejas, donde puede descomponerse la figura total en sub-figuras más simples, entran en juego la complementariedad y el solapamiento, aspectos que inhiben o potencian la percepción: fisiológicamente predomina la percepción de figuras complementarias y no solapadas. En la siguiente figura, por ejemplo, será más fácil percibir tres triángulos (complementarios y sin solapamiento) que los tres paralelogramos que se pueden visualizar y que sí se solapan (2 romboides y un trapecio isósceles).



- nivel operativo de percepción visual: en este nivel podemos operar sobre las figuras, manipulando mentalmente las diferentes sub-configuraciones posibles (más allá de las sub-configuraciones que se hacen evidentes en la construcción de la misma o en el enunciado que acompaña la figura), para obtener otra disposición significativa y útil. Se trata de mover las piezas del “rompecabezas” para lograr otra configuración relevante para solucionar el problema. El ejemplo típico es la prueba sin palabras del Teorema de Pitágoras, como veremos en la actividad 2 de la experiencia de aula (punto 4.6)).

b) Procesos de justificación: requieren superar las dificultades inherentes a la aparente falta de sentido de una deducción (qué deducimos al ver una figura geométrica dibujada). Se trata de que los alumnos vayan transformando su discurso informal de razonamiento (apoyado fuertemente en la visualización), a un discurso formal o deductivo que encadene proposiciones, usando reglas lógicas. Se trata de superar los obstáculos debidos al funcionamiento fisiológico. En este proceso se pasa por el proceso de precisión del lenguaje, en el que es imprescindible enunciar definiciones y teoremas. Dado que nuestro trabajo se centra en alumnos de 2º de la ESO, nos quedaremos más bien en este primer nivel básico de **discurso informal**, en el que los alumnos justificaran

sus respuestas con sus propias palabras. Para ayudar a nuestros alumnos a ir superando esta brecha entre el discurso informal y el formal, es fundamental insertar al alumno en un esfuerzo de interpretación y explicación de fenómenos teórico-perceptivos como lo son las construcciones geométricas.

c) Construcción geométrica como herramienta para superar el conflicto entre ambos procesos, pues ésta permite asegurar las características geométricas del dibujo y determinadas propiedades. Las aspiraciones básicas de la construcción geométrica son: asegurar el cumplimiento de propiedades geométricas (superando las limitaciones de la percepción del dibujo) y lograr una generalización, asegurando la reproductibilidad del dibujo, considerando únicamente las propiedades fundamentales del mismo usando instrumentos técnicos como la regla y el compás. Esta construcción geométrica es el motor del pensamiento deductivo, pues permiten al alumno descubrir propiedades que él no puso allí, lo cual le permite descubrir que hay alguna relación de implicación entre las propiedades que él puso, y las que descubrió después. Un ejemplo muy claro de ello es la construcción de un hexágono regular con compás, como veremos en la actividad 3 de la experiencia de aula (punto 4.6)).

Al establecer conexiones entre los procesos de visualización y de justificación, el razonamiento deductivo adquiere sentido para los alumnos como posibilidad de explicación, de comprensión y de argumentación.

3) ANALISIS PRUEBAS DIAGNÓSTICAS GENERALITAT EN GEOMETRÍA.

3.1) Introducción pruebas diagnósticas.

De acuerdo con la Ley Orgánica de Educación (LOE) y con su desarrollo en Cataluña (decretos 142/2007 y 143/2007), y tal y como se prevé en las resoluciones para la organización y el funcionamiento de los centros, todos los centros deben hacer una evaluación de diagnóstico, centrada en las competencias básicas del currículum. Esta evaluación diagnóstica debe permitir evaluar la consecución de la competencia matemática y comunicativa lingüística tanto al final del ciclo medio de la educación primaria (que en este caso no nos compete), como al final del primero ciclo de la ESO.

Como hemos visto en el apartado 2.1) de este trabajo, nos centraremos en las pruebas llevadas a cabo a los alumnos del 3er curso de la ESO, para evaluar las competencias alcanzadas hasta el momento (tras haber cursado 2º de la ESO), para asegurar que el alumno haya cursado íntegramente los aprendizajes previstos.

Esta evaluación diagnóstica es una evaluación orientativa y formadora para los centros y, por tanto, no determina el expediente académico individual de los alumnos. Y debe permitir a los centros, junto con otros indicadores externos y/o internos, valorar la práctica docente del ciclo inicial de la ESO (1º y 2º) y, si procede, reorientarla.

Esta evaluación proporciona a los centros un instrumento homogéneo de medida puesto que, aunque la elaboración de las pruebas y las pautas para su administración y corrección son externas, su administración, corrección y análisis de resultados corren a cargo de los equipos docentes de los centros educativos.

El curso 2013-14 es el quinto curso en qué se ha aplicado la evaluación diagnóstica, pero en la competencia matemática es el cuarto curso, puesto que el primer curso sólo había prueba para las competencias lingüísticas.

Toda la información necesaria para la correcta aplicación de las pruebas está disponible en el correspondiente portal, tanto para centros públicos, como para centros concertados y privados (**véase [2]**).

3.2) Descripción pruebas diagnósticas en matemáticas.

La estructura de la prueba de competencia matemática de 3º de la ESO incluye actividades referidas a las cuatro áreas establecidas en el currículum:

- numeración y cálculo
- medida, espacio y forma
- cambio y relaciones
- estadística y azar

Llegado este punto debemos mencionar que si bien el área de “medida” en ocasiones se considera como un área independiente, en realidad está en estrecha relación con el área de espacio y forma que nos ocupa. Es evidente que para trabajar la geometría necesitamos medir (ángulos, lados, alturas, etc de las figuras geométricas) y saber cambiar unidades dentro de un mismo sistema (sistema métrico decimal), pero estos conocimientos de medida ya son implícitos a la geometría (un alumno no puede resolver correctamente un problema geométrico sin saber, por ejemplo, medir el lado de un polígono o dar su resultado en la unidad de medida correcta). Por tanto, no entraremos a valorarlos en este trabajo. Tampoco entraremos a valorar en este trabajo las equivalencias entre masa, capacidad y longitud, que formarían parte del área de medida. En consecuencia, y para simplificar, al área de medida, espacio y forma la llamaremos a partir de ahora espacio y forma, o simplemente geometría.

Por tanto nos centraremos únicamente en las actividades de espacio y forma, que es el objeto de este trabajo, anexando únicamente las actividades de geometría planteadas a lo largo de estos 4 últimos cursos, ordenadas de más antiguas a más recientes, para poder analizar al mismo tiempo su evolución. Detallamos a continuación la puntuación otorgada a preguntas y/o actividades de geometría sobre el total de puntos de la competencia matemática, así como el porcentaje resultante, curso por curso:

- Curso 2010-2011: 3/33 – 9% (**anexo 2.1**)
- Curso 2011-2012: 7/26 – 27% (**anexo 2.2**)
- Curso 2012-2013: 7/30 – 23% (**anexo 2.3**)
- Curso 2013-2014: 4/27 – 15% (**anexo 2.4**)

Haciendo el promedio, tan sólo un 18% de la puntuación total en la competencia matemática de estas 4 ediciones corresponde a la geometría (21 puntos sobre los 116 totales), por debajo del 25% que le correspondería si se concediera la misma importancia a las cuatro áreas. No obstante, si descartamos la primera edición, este porcentaje asciende hasta casi el 22%; entendemos que este porcentaje se incrementó a partir de la segunda edición, tras constatar los malos resultados en geometría.

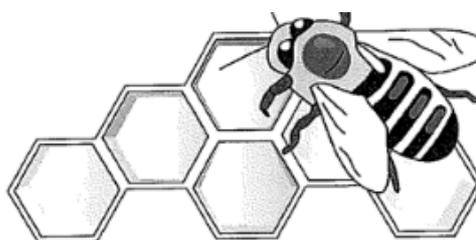
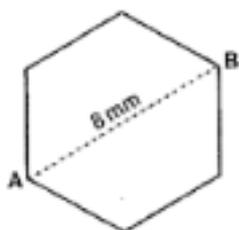
Llama la atención el hecho que en el transcurso de las tres últimas ediciones, haya ido disminuyendo el porcentaje de actividades de geometría, desde el 27% de 2012-2013, hasta el 15% de la última edición. En vista de que los resultados en geometría no parecen haber mejorado en los últimos años, al menos de forma significativa (al apartado 2.1) nos remitimos), creemos que no deberíamos bajar la guardia en esta área y deberíamos mantener al menos el 25% que le correspondería a la geometría si fuéramos equitativos.

3.3) Análisis pruebas diagnósticas de geometría.

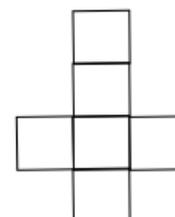
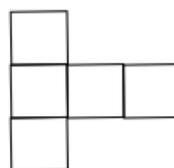
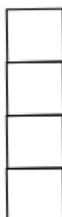
Antes de adentrarnos en el punto 4) sobre las dificultades que encuentran los alumnos al aprender geometría, y a modo de ilustración, procedemos a continuación a identificar los procesos vistos anteriormente y que aparecen en estas pruebas diagnósticas. Para ello, pondremos un ejemplo claro de cada uno de los procesos:

a) Proceso de visualización:

- nivel global de percepción visual: si bien no hay preguntas específicas para este nivel básico, sí queda implícito en todas las actividades. A destacar que, como se puede ver en el **anexo 2.2** (actividad del enjambre), los hexágonos están dibujados sin que su base esté apoyada en posición horizontal; entendemos se han puesto así a propósito; en todo caso, en el dibujo del enjambre completo, sí se apoyan los hexágonos en su base, como acostumbramos a hacer (tal y como hemos visto en el punto 2.3.a) de este trabajo). Esta actividad será una de las propuestas a nuestros alumnos en la experiencia de aula (ver actividad 4 del apartado 4.6)).



- nivel constitutivo de percepción visual: el ejemplo sería la actividad de la fábrica de cajas (**anexo 2.4**), donde se pide al alumno que descomponga la imagen tridimensional del cubo, en su imagen bidimensional correspondiente (6 caras o cuadrados), marcando la opción correcta de entre las tres propuestas (la correcta sería la última).



- nivel operativo de percepción visual: NO hay ninguna actividad que integre este nivel de visualización; creo que deberían añadirlo en futuras ediciones.

b) Proceso de justificación:

Entre todas las pruebas de geometría analizadas, hay preguntas que piden escoger la respuesta correcta entre tres o cuatro opciones (tipo A), otras de respuesta abierta donde se pide un número como respuesta (tipo B) y otras donde además se debe justificar la respuesta dada previamente (tipo C). De los 21 puntos totales de espacio y forma, 4 corresponden a preguntas del tipo A, 11 al tipo B y 6 al tipo C (28%). De acuerdo con la importancia que sabemos que debemos otorgar a la justificación, vemos muy apropiado las preguntas del tipo C. En la última **edición 2013-14** no se concedió ningún punto a la deducción, mientras que en la anterior **edición 2012-2013** se otorgaron 2 puntos; creemos que habría que otorgar algún punto a la justificación en este tipo de pruebas.

Tambien comentar que en la primera **edici3n 2010-2011 (anexo 2.1)** s3lo se plante3 una actividad de geometr3a ("multipizza") que confer3a los 3 3nicos puntos de geometr3a a una sola pregunta, 3ntegramente de justificaci3n. S3lo permit3a otorgar un punto (si el alumno planteaba correctamente la resoluci3n del problema, usando las f3rmulas adecuadas, pero comet3a un error de c3lculo) o tres puntos si la respuesta era correcta y estaba bien argumentada. Si el alumno planteaba bien el problema (justificaci3n correcta) pero no usaba las f3rmulas adecuadas, cero puntos. Y si s3lo fallaba c3lculos, s3lo un punto, cuando igual merec3a dos. Entiendo que se dieron cuenta del doble error de otorgar el 100% de los puntos de geometr3a al proceso de justificaci3n, y del error en los criterios de correcci3n; y de ah3 decidieron cambiar el formato a partir del curso siguiente. Mostramos a continuaci3n la actividad en cuesti3n con la respuesta correcta en negrita, seg3n el patr3n de correcci3n de la Generalitat:

Mentre sopen, la Laila explica que coneix una pizzeria on fan pizzas quadrades i tamb3 pizzas hexagonals. Els altres no s'ho creuen i la Laila, per demostrar que no s'ho ha inventat, busca el web i mostra l'anunci als altres.



Si no t'agraden gaire les vores, quina pizza has de demanar? Utilitza els conceptes de *per3metre* i *3rea* per justificar-ho.

Vora_{circular} = 69,11 cm; vora_{quadrada} = 80 cm; vora_{hexagonal} = 72 cm

A_{circular} = 380,13 cm²; A_{quadrada} = 400 cm²; A_{hexagonal} = 374,12 cm²

La que t3 menys vora 3s la circular, la que en t3 m3s 3s la quadrada. Podem descartar l'hexagonal donat que t3 m3s vora que la circular per3 menys 3rea de pizza. Entre la circular i la quadrada, 3s discutible perqu3 la quadrada aporta m3s superf3cie (20 cm² m3s), encara que tindrem 10 cm m3s de vora. Si els arguments estan ben presentats, podem acceptar qualsevol de les dues respostes (circular o quadrada).

Valoraci3: Si planteja correctament la resoluci3n del problema, usant les f3rmules adients i comet algun error de c3lcul, 1 punt. Si arriba a la resposta correcta i ben argumentada, 3 punts.

Habr3a que encontrar un punto medio, tal que cada edici3n integre alguna pregunta vinculada a la justificaci3n, que otorgue aproximadamente un tercio de la puntuaci3n.

c) Proceso de construcción geométrica

De entre todas las ediciones, tan sólo encontramos un punto dedicado a la construcción geométrica, aunque más bien se trata únicamente de dibujar dos triángulos equiláteros que se forman al unir los vértices de un hexágono regular ya construido.

Quizás se echa de menos alguna actividad sencilla de construcción geométrica que implique el uso de instrumentos como la regla y el compás (construcción del circuncentro o incentro de un triángulo y su correspondiente circunferencia circunscrita o inscrita), pero se entiende perfectamente que las limitaciones de tiempo y el riesgo de que el alumno no lleve el material necesario, lo impidan. Además, si nos centramos en el objetivo de proponer actividades de la vida cotidiana, quizás no tenga sentido que todos los alumnos dominen la construcción geométrica (aunque sí deberá ser el caso de los futuros estudiantes de carreras universitarias con dibujo técnico, tales como ciertas ingenierías o la arquitectura).

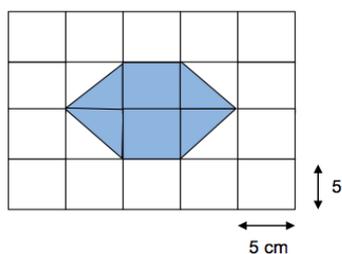
En todo caso, creo que este proceso se ha de trabajar más en clase, ya sea en la materia de matemáticas o en la de artes plásticas, o mejor aún de forma conjunta.

Una vez vistos estos procesos en las pruebas diagnósticas analizadas, deberíamos también poder identificar qué procesos de conceptualización están implícitos para su correcta resolución. Para que el alumno pueda resolver favorablemente estos ejercicios varios, debe haber asimilado a la perfección los siguientes conceptos: polígonos regulares (con sus propiedades y particularidades), perímetros, áreas y volúmenes.

Finalmente, y tras analizar estas pruebas, constatamos en primer lugar que todas las ediciones integran los correspondientes criterios de evaluación:

- análisis de las características y propiedades de las figuras geométricas,
- utilización de la visualización y de modelos geométricos para resolver problemas,
- comprensión de las magnitudes medibles y de las unidades,
- aplicación de técnicas e instrumentos para medir.

Un apunte en referencia al criterio de la comprensión de las magnitudes medibles y de las unidades: creo que se le facilita demasiado al alumno esta cuestión pues en varias de las preguntas se le evita tener que pensar si tiene que cambiar o no de unidades, e incluso tener que escribir la unidad final en la respuesta al problema o actividad, puesto que le viene ya dada. En alguna actividad, el alumno puede resolver perfectamente la actividades sin tener que parar a plantearse el tema de las unidades. Creo que debería corregirse este aspecto, obligando al alumno a que escriba la unidad, y planteando algún cambio de unidades en algún momento de la actividad. Ejemplo de ello los vemos en la actividad de la figura hexagonal de la **edición de 2012-13 (anexo 2.3)**:



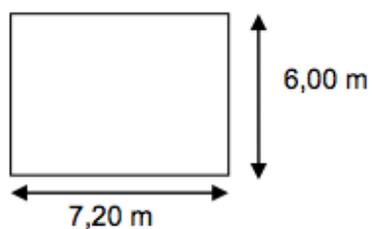
1 Calcula l'àrea (color fosc) de la figura hexagonal.

Resposta:100..... cm²

El cuanto al tipo de preguntas realizadas, éstas nos parecen muy apropiadas puesto que están relacionadas con la vida cotidiana (cajas cúbicas de cartón y su correspondiente embalaje, reformas en una habitación o multipizza), y por tanto, los alumnos se sienten más identificados con ellas y, por tanto, más motivados para su resolución.

En cuento a los criterios de corrección, reiteramos nuestra disconformidad en el repartimiento de puntos en lo que concierne a espacio y forma (hay que otorgarle alrededor de un 25% de la puntuación total de matemáticas) y en lo que concierne a los procesos de justificación (otorgarles alrededor de un tercio de la puntuación de geometría). Pero encontramos que éstos son claros en el sentido que no dan lugar a ambigüedades en la nota otorgada por el corrector al alumno (proceso de corrección unificado): la mayoría de preguntas sólo tienen una respuesta correcta (se otorga 0 o 1 punto), y en las preguntas de justificación se especifica el criterio a seguir de forma muy clara.

Según nuestro documento base de trabajo (**anexo 1**), si bien el enunciado no es un recurso de representación visual, influencia la visualización, ayudando a percibir aspectos que habrían pasado desapercibidos sin él. Y permite diferenciar un dibujo de una forma geométrica al aclarar qué información se puede obtener de la figura y cuál no (si el enunciado dice “este cuadrado”, se aseguran las condiciones de congruencia y perpendicularidad entre los lados). Los enunciados de las pruebas anexas nos parecen claros y directos. Sin embargo, las medidas indicadas no son reales, y se debería indicar que la imagen está a escala. Además, la escala no siempre es la adecuada, como podemos ver en la actividad 7 (“reformas en una habitación”) de la **edición 2012-13 (anexo 2.3)**, en la que figura un rectángulo que representa la planta de una habitación con las dimensiones 6 x 7,20 m que no parecen estar a escala (lo he medido con regla). Esta inexactitud podría llevar a confusiones a nuestros alumnos, y son un mal ejemplo de precisión (valor fundamental en las matemáticas); de hecho constatamos cierta falta de precisión por parte de nuestros alumnos, como veremos en la actividad 1) de nuestra prueba inicial y final, donde un gran porcentaje de alumnos han marcado un rectángulo como un cuadrado, por no haberse tomado la molestia de medir los lados de la figura dibujada (muchos alumnos dan muchas cosas por sentadas). Por tanto, todos debemos dar ejemplo de precisión, evitando representaciones como éstas:



3.4) Conclusiones y crítica constructiva.

Tras haber analizado en detalle todas las actividades de geometría de las pruebas diagnósticas de las 4 ediciones de matemáticas redactadas hasta el momento, y tras haber constatado los malos resultados de nuestros alumnos en geometría durante los últimos años, concluimos que debería dedicarse un mayor porcentaje a la geometría.

Por otro lado, creemos que faltaría introducir alguna actividad que abarque el nivel operativo de visualización, previo al proceso de justificación, al que por otro lado se deberían dedicar más puntos.

Finalmente, y aparte de pequeños cambios que personalmente introduciría en la redacción de alguna actividad puntual de estas pruebas, creo que éstas son muy adecuadas en el sentido de que permiten analizar el grado de consecución de la competencia matemática por parte de nuestros alumnos (**véase [5]**), que al fin y al cabo es el objetivo básico de las mismas, y todo ello a través de ejemplos prácticos relacionados con la vida cotidiana.

4) ANALISIS DIFICULTADES REALES ALUMNOS PRIMER CICLO ESO.

4.1) Descripción de la optativa de geometría en el centro donde he realizado mis prácticas de máster.

En el centro donde he podido cursar mis prácticas durante este curso 2013-14, hasta hace 4 años se impartía la geometría dentro de la materia de matemáticas, como suele hacerse en la mayoría de centros educativos, en cada uno de los cursos de la ESO. Sin embargo, el centro se percató de la necesidad de establecer aparte ciertas materias consideradas como básicas, con el fin de darles mayor intensidad y profundización. Así lo hizo con la geometría, que es una materia independiente que se imparte en 2º de ESO (3 horas por semana), de forma cuatrimestral (en el otro cuatrimestre los alumnos hacen morfosintaxis). Cuando decimos optativa nos referimos a que el centro la ha escogido como materia independiente, no que sea una materia de libre elección por parte de los alumnos y, por tanto, todos los alumnos de 2º de ESO la cursan.

Los alumnos de 1º de ESO (que han hecho como materia optativa Estadística), llegan a 2º de ESO con la geometría que han aprendido en primaria. Los grupos se forman a principios de curso según criterio de los profesores, de forma que se intenta que los grupos queden compensados entre sí, y sean lo más homogéneos posibles unos con los otros (grupos equilibrados en cuanto a nivel). Se crean 4 grupos de unos 25 alumnos cada uno, de forma que durante el primer cuatrimestre se imparte la materia a dos grupos, y durante el segundo a los otros dos.

Es importante mencionar llegado este punto que yo estuve como observadora en gran parte de las clases de geometría de uno de los grupos del primer cuatrimestre (de ahí me vino la idea de mi TFM, como veremos en el punto 4.2); si bien entonces aún no sabía en qué materia y grupo impartiría mi unidad didáctica (UD) a partir de febrero, este período de observación me sirvió para empezar a ver cómo se impartía la materia por un lado, y qué dificultades encontraban los alumnos por otro lado.

Y como este tema de las dificultades en el aprendizaje de la geometría me interesaba ya desde hacía tiempo (ya lo analizamos a fondo el curso pasado en la asignatura de “Innovación Docente e Iniciación a la Búsqueda en Ámbito de la Educación Matemática”), opté por impartir mi UD en uno de los grupos de geometría del segundo cuatrimestre (febrero-junio 2014) por un lado, y centrar mi TFM en este tema concreto por otro: de ahí el título de mi TFM.

El título de la UD impartida por mí en el centro de prácticas es: “**Lugares geométricos y figuras planas (geometría euclidiana)**”, dentro de la sección de Espacio y Forma de la materia de matemáticas. De todo el temario de la materia optativa, he impartido los temas centrales (T2, T3 y T4 de rectas, ángulos, circunferencias y figuras planas y áreas), 25 sesiones de una hora, dejando tan sólo el T1 de medidas y el T5 de volúmenes al profesor titular (T1 va por libre, y T5 se imparte ya en junio). La programación completa y detallada de esta UD (competencias básicas, objetivos,

contenidos, criterios de evaluación y metodología) la pueden encontrar en mi portafolio de las prácticas de centro, entregado formalmente el 20 de mayo vía Atenea.

De hecho, algunos de los aspectos generales de esta UD serán citados a lo largo de este trabajo, puesto que algunas de las carencias que hemos constatado en la impartición de la geometría en el centro (por ejemplo escaso fomento de alguna competencia básica, o de algún aspecto de la metodología), se han tratado de cubrir aprovechando la acción atípica llevada a cabo durante una sesión completa (ver punto 4.6)).

Me hubiera gustado poder impartir la misma unidad didáctica en dos grupos diferentes para poder hacer una comparativa, pero ello no era materialmente posible pues ambos grupos cursan la materia “optativa” de forma simultánea. En todo caso, al tratarse de grupos supuestamente homogéneos, no deberían existir muchas diferencias significativas entre ambos grupos.

El centro nos comenta que los resultados en matemáticas de las pruebas diagnósticas que sus alumnos hacen en 3º de la ESO sí han mejorado en estos 4 años, pero no de forma significativa. Por otro lado, los resultados del centro en matemáticas en la última edición de estas pruebas (curso 2013-14) han sido superiores a la media de Cataluña. Parte de estos resultados se puede atribuir al hecho de haber constituido la geometría y la estadística como materias independientes en el primer ciclo de la ESO (áreas con peores resultados históricamente), lo que permite a los alumnos centrarse más en cada una de las área matemáticas, pero no podemos saber hasta qué punto. En todo caso, el centro tiene claro que queda mucho camino por recorrer.

4.2) Primeras impresiones durante el período de observación.

Durante los meses de noviembre y diciembre estuve como observadora en gran parte de las sesiones de impartición de la geometría, en un grupo de 2º de la ESO (3 horas semanales). El tema central fue el de figuras planas y áreas.

En cuanto al tema de la impartición de la materia, me encontré ciertas limitaciones al tratar de diseñar mi propia UD, por los siguientes motivos (todos ellos lógicos):

- porque ambos grupos hacen exactamente lo mismo en cada sesión (debemos ir a la par en cuanto a ritmo de explicaciones, ejercicios que se hacen y contenidos que se explican)
- porque se tiene que tratar de impartir lo mismo a los alumnos el segundo cuatrimestre que a los del primero, de forma que no pudimos introducir novedades importantes
- porque el tiempo aprieta, teniendo en cuenta que los alumnos encuentran serias dificultades en algunos contenidos, que obligan a ralentizar el ritmo de las explicaciones, de forma que no queda mucho tiempo para llevar a cabo actividades o acciones diferentes que, por otro lado y paradójicamente, ayudarían considerablemente a afrontar estas dificultades. Por ejemplo, durante el primer cuatrimestre, no dio tiempo a explicar la segunda parte del tema de cuerpos geométricos y volúmenes (T5), puesto que la temporización real de la

impartición de fue superior a la planificada, sobretodo en el tema central de la material (Tema 4: Figuras planas y áreas).

A pesar de estas comprensibles y genéricas limitaciones, debo agradecer al centro que me haya concedido casi 3 sesiones completas para llevar a cabo mi estudio sobre el tema central de este TFM (como veremos en el punto 4.3)).

Por otro lado, este período de observación me permitió reconfirmar que ciertamente los alumnos se encuentran con muchas dificultades en el aprendizaje de la geometría, sobre todo en relación a la visualización y la deducción, los dos procesos centrales de nuestro documento base de trabajo.

A continuación citaremos algunos ejemplos de estas dificultades geométricas, muchas de ellas en el tema central de mi UD (Teorema de Pitágoras y sus aplicaciones):

- detectar triángulos dentro de una polígono plano para calcular la suma de ángulos internos del polígono,
- detectar rectas paralelas o perpendiculares cuando no están en la posición habitual (que es la de horizontales o verticales, de acuerdo con la gravedad),
- detectar ángulos opuestos por el vértice, así como ángulos complementarios y suplementarios,
- identificar la hipotenusa, cuando el triángulo rectángulo no está en la posición típica (apoyado en el ángulo recto ) ,
- detectar triángulos rectángulos dentro de un polígono regular dado, para calcular un elemento del mismo (altura de un triángulo, diagonal de un rectángulo, lado de un rombo o apotema de un polígono regular),
- descomposición de figuras planas en otras sub-figuras planas regulares (semicircunferencias u otras figuras regulares).

La mayor parte de ellas provienen de dificultades en la visualización, en la percepción de ciertos elementos geométricos o figuras planas, especialmente cuando su posición no es la que iría de acorde con la gravedad, como hemos visto en el punto 2.3).

Por último, hemos constatado que esta materia se imparte de forma tradicional, puesto que las clases se basan en la corrección de ejercicios (deberes del día anterior) y avance en la materia combinada con ejemplos. Los alumnos anotan todo en sus libretas, que es de donde luego estudiarán. En las clases se combina la proyección digital con la pizarra tradicional, pero poco dista este método del método convencional. Los alumnos tienen ordenadores portátiles que no usan en las clases, sino sólo en sus casas para consultar el libro digital o la plataforma digital de la escuela, donde los profesores “cuelgan” las “sites” (para cada materia y curso hay una “site” que es una herramienta del google drive que permite crear una página compartida con alumnos y padres); de esta forma los alumnos encuentran allí todo lo relativo al tema que están estudiando (teoría, apuntes, ejemplos y ejercicios). Incluso hay un “thatquiz” por cada tema, a realizar de forma voluntaria por parte del alumno, dado que el centro vio la dificultad que implicaba su corrección (si el alumno ponía un punto en lugar de una coma, el resultado era incorrecto).

Esta forma tradicional de impartición de la materia no contribuye al fomento de competencias básicas como la competencia digital o la competencia social/ciudadana, ni

incita a la conexión con otras materias. En todo caso, nos consta que en este centro sí se lleven a cabo de forma paralela proyectos transversales que sí integran estas competencias. A partir del próximo curso, el centro llevará a cabo un proyecto piloto en dos cursos (y en dos cursos adicionales durante el siguiente curso), el “Proyecto Horitzó 2020” dentro de la Fundación Jesuitas Educación, en los que se trabajará únicamente con proyectos transversales, en grandes espacios físicos (no habrá asignaturas ni aulas como las entendemos hoy en día). Por tanto, habrá una revolución en el proceso educativo que romperá con el sistema tradicional de enseñanza. Un claro ejemplo de proyecto interdisciplinario sería la rehabilitación de un monumento histórico, que implicaría conocimientos en arte, en historia, en construcción, en economía o en matemáticas (cálculo de superficies a revestir por ejemplo). El ideal sería poder trabajar íntegramente por proyectos, y así parece que se hará en el futuro en el centro.

4.3) Propuesta del plan de acción.

Como hemos comentado en la introducción de este trabajo, y siguiendo nuestro documento base de trabajo (véase [4], anexo 1), nuestro análisis del aprendizaje de la geometría se centra en tres procesos: visualización, justificación y construcción geométrica, como nexo entre las dos anteriores. **Nuestras hipótesis de investigación de partida** son las siguientes:

- a) El proceso de visualización conlleva superar dificultades de percepción visual a nivel global (donde predominan aspectos no matemáticos como la posición, la orientación o el trazo), a nivel constitutivo (identificación de los elementos constitutivos de la figura y las relaciones entre ellos), y a nivel operativo (manipulación mental: realización de transformaciones visuales, no necesariamente mediadas por un discurso formal, para obtener otra disposición significativa y útil). En el nivel global, además de los tres aspectos analizados en base al documento base (posición, orientación y trazo), hemos investigado también aspectos más sutiles como el relleno y la forma de las figuras, analizando dentro de este último aspecto su simetría, sobre todo en los casos en que pueden ser descompuestas en figuras más simples.
- b) El proceso de justificación conlleva superar dificultades de una organización deductiva del discurso formal (encadenamiento lógico-deductivo de afirmaciones, uso de símbolos).
- c) La adquisición de técnicas y habilidades de percepción visual puede ser aprendida simultáneamente al estudio de la Geometría: la construcción geométrica mediante actividades manipulativas permite articular los procesos de visualización y justificación entre ellos, y fomenta su desarrollo.

Sin perder de vista nuestro objetivo central de medir las dificultades que encuentran nuestros alumnos en el aprendizaje de la geometría con el propósito de minimizarlas (incidiendo en nuestros alumnos), se han diseñado en paralelo unos ejercicios y unos indicadores que permitan cuantificar estas dificultades en cada uno de los procesos de conceptualización de la Geometría: visualización, justificación y construcción geométrica. También se ha diseñado una acción a llevar a cabo en el aula (experiencia de aula),

con actividades estrechamente ligadas a las pruebas inicial y final, encaminadas a minimizar las dificultades encontradas por el alumno en la prueba inicial, para constatar una mejora de resultados en la prueba final respecto a la inicial.

Todas estas acciones han permitido por otro lado desarrollar una metodología de enseñanza más completa que la existente en la impartición de la UD del centro, con sus tres fases (inicial, de desarrollo y final):

- prueba inicial que nos permitirá comprobar de entrada las habilidades visuales y de justificación de nuestros alumnos en ese primer momento, y con qué dificultades se encuentran (ver apartado 4.4)). Corresponde a la **fase inicial**.
- prueba final que será la misma que la inicial, y nos permitirá llevar a cabo una comparativa con la inicial, mediante unos indicadores de evaluación pensados en términos de detectores del nivel de visualización y deducción por parte de nuestros alumnos (ver apartado 4.4)). Corresponde a la **fase final**.
- experiencia de aula: sesión completa de una hora en la que realizaremos actividades varias a modo de acción a implementar en el aula para conseguir nuestro objetivo (ver apartado 4.6)). Corresponde a la **fase de desarrollo**.

A través de los indicadores diseñados con el fin de cuantificar estas dificultades por parte de nuestros alumnos (ver apartado 4.5)), podremos llevar a cabo una comparativa de resultados entre la prueba inicial y final (ver apartado 4.7)), donde la clave está en si hemos conseguido, gracias a la experiencia de aula y a otras acciones, incidir en las habilidades geométricas de nuestros alumnos de forma que hayamos minimizado sus dificultades de aprendizaje de la geometría (sobre todo en lo que a visualización y deducción se refiere). Las conclusiones y crítica constructiva las encontraremos en el apartado 4.8).

4.4) Diseño de las pruebas diagnósticas inicial y final.

El objetivo fundamental y genérico de la sección Espacio y Forma para toda la ESO es “desarrollar el análisis de las características y propiedades de las figuras de dos y tres dimensiones; localizar y describir relaciones especiales identificar y aplicar transformaciones geométricas, y utilizar la visualización y modelos geométricos para resolver problemas” (**véase [6]**). De forma paralela, hay un objetivo central para el área de matemáticas: **utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para descubrir y probar propiedades geométricas y para resolver problemas de la vida cotidiana y juegos estratégicos de tipo geométrico** (se trata de hacerlo en contextos no matemáticos o situaciones de la vida cotidiana). Este objetivo concuerda plenamente con los procesos de visualización y justificación de nuestro documento base (ver apartado 2.3)), en el que se citaba la construcción geométrica como nexo entre ambos. En lo que respecta a la modelización geométrica, no la analizaremos en este trabajo por considerar a nuestros alumnos están aún en una edad temprana (tienen 13-14 años) y aún no están preparados para ello. Creemos prioritario centrarnos en la visualización por un lado, y en el razonamiento matemático, de justificación o de deducción por otro.

Como hemos comentado anteriormente, no entraremos en detalle en este apartado en la construcción geométrica, básicamente por falta de tiempo, pero en nuestra experiencia de aula hemos introducido una actividad manipulativa relativa al hexágono regular, aprovechando la ocasión para que construyan un hexágono regular con compás, y encuentren qué propiedades básicas se cumplen (ver apartado 4.6)).

Si bien estas pruebas no cuentan para nota final de la materia, sí hemos pedido a nuestros alumnos que pongan el nombre para poder hacer la comparativa de forma individualizada, y obtener unos resultados más fiables, pudiendo incluso comparar las respuestas de un mismo alumno a una determinada actividad en caso de considerarlo necesario.

La prueba inicial diagnóstica nos permite evaluar mediante los indicadores diseñados, las habilidades de percepción visual y de justificación de nuestros alumnos. Esta prueba se lleva a cabo el primer día de mi impartición de la UD (sesión 1 – 19/02/14), con una duración de unos 20 minutos, y consiste en 7 preguntas cortas. En esta misma sesión comunicamos a los alumnos el motivo de esta prueba, y les informamos acerca de la prueba final y de la experiencia de aula que llevaremos a cabo en una sesión completa, para poder llevar una comparativa entre ambas pruebas inicial y final. Hemos insistido en mis objetivos en el marco de mi TFM, insistiendo en que la evaluación por mi parte no tendrá ningún impacto en su nota de la materia.

La prueba final diagnóstica se utiliza para llevar a cabo una comparativa en el tiempo, y ver la evolución del alumno en términos del grado de desarrollo de sus habilidades de visualización y deducción geométricas. Esta prueba se lleva a cabo al final de mi impartición de la UD (antes del examen, para que los alumnos estén relajados y de paso les pueda servir como repaso), en la sesión 23 – 14/05/14. Es exactamente la misma que la inicial (20 minutos de duración), y dedicamos el resto de la sesión a hacer una corrección de la misma (co-evaluación) y a pasar una encuesta para que evalúen la utilidad de mi acción y mi intervención durante toda esta UD. Inicialmente había pensado en modificar algunos datos de la prueba final, pero finalmente decido no modificarla porque transcurren casi tres meses entre ambas (tiempo suficiente para que apenas la recuerden) y así podemos hacer una comparativa más real.

La prueba diseñada que servirá tanto de prueba inicial como de prueba final puede verse en el **anexo 3** de este trabajo. Se han elaborado las preguntas partiendo de nuestro documento base, sobre todo en lo que a visualización se refiere: las 6 primeras preguntas hacen referencia al proceso de visualización, y sólo la última al proceso de deducción (actividad 7), en la que se le pide al alumno una justificación relacionada con la pregunta precedente, que obliga al razonamiento. Creemos que en esta fase inicial en la que se encuentran nuestros alumnos en su aprendizaje de la geometría es donde debemos trabajar a fondo el proceso de visualización, que es primer eslabón de la cadena, aunque no por ello podemos olvidar el proceso de justificación. Tras haber acompañado a los alumnos durante la impartición de la materia en el primer cuatrimestre, puedo concluir que necesitan una inmersión en visualización (lo cual es lógico porque se trata de “sus primeros pinitos” en geometría) y que todavía no están familiarizados con la deducción.

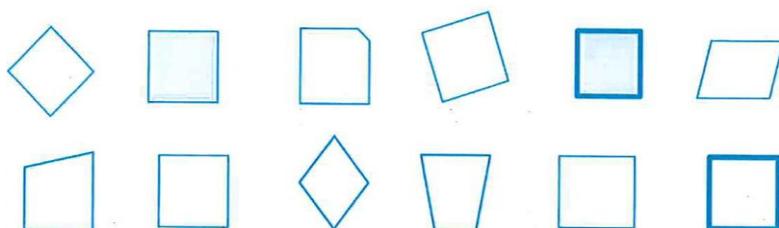
De estas 6 preguntas de visualización, hemos planteado dos en cada una de los niveles de percepción visual: las 2 primeras del nivel global, las 2 siguientes del nivel constitutivo, y las 2 últimas del nivel más complejo, el nivel operativo.

4.4.1) Nivel global de percepción visual.

En este nivel se trata de demostrar que fisiológicamente predomina la percepción de figuras con base abajo y de trazo fino, así como la relación de perpendicularidad entre rectas cuando su orientación es horizontal o vertical (como hemos visto en el apartado 2.3)).

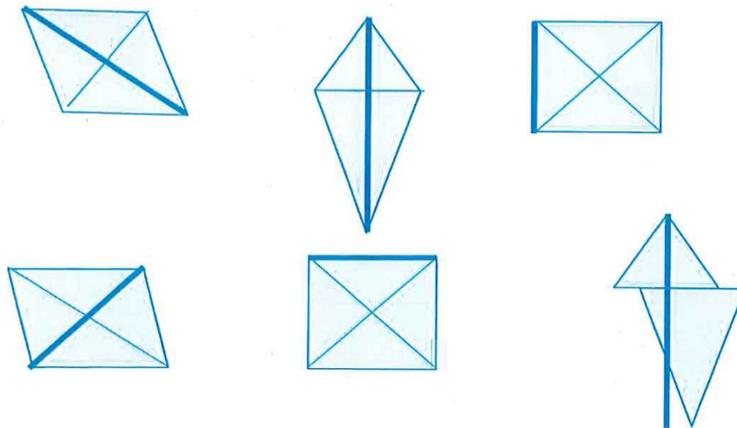
En la actividad 1) hemos planteado 12 figuras planas, preguntando al alumno que rodee con un círculo todos los cuadrados que encuentre. Todas las figuras son cuadriláteros menos una que es un pentágono irregular aunque parece más bien un cuadrado con un pequeño “recorte” en uno de sus vértices. Entre el resto encontramos paralelogramos (cuadrados, rectángulos y rombos) y trapecios, obligando en un caso al alumno a medir una de las figuras para cerciorarse si es o no un cuadrado (de hecho es un rectángulo). Y entre los cuadrados hemos jugado con su posición (dos de ellos no tienen la base apoyada en posición horizontal), con su tipo de trazo (dos de ellos con trazo más grueso) y con el relleno (hemos dado color interior a dos de ellos para valorar si el relleno influye o no en la percepción visual, aspecto que hemos medido al margen de los aspectos de visualización indicados en el documento base de trabajo). Del total de las 12 figuras propuestas, el alumno debería marcar 6 de ellas como cuadrados.

1) Encercla els quadrats que trobis en la sèrie següent:



En la actividad 2) hemos planteado 6 figuras planas (todas ellas con el mismo relleno, color interior suave), en cada una de las cuales hemos resaltado un segmento con trazo más ancho que el resto de rectas, solicitando al alumno que marque con la regla, si lo(s) hay, lo(s) segmento(s) perpendicular(es) a cada una de los segmentos resaltados. La última de las figuras es una variante de la segunda, para ver si el hecho de que no tenga simetría influye en la respuesta del alumno. Es importante destacar que en el caso de los dos cuadrados propuestos, el alumno debería marcar en cada caso dos segmentos perpendiculares al resaltado, en un caso horizontal y en el otro vertical; así podremos ver si percibe igualmente ambas posiciones.

2) Cadascuna de les figures següents està formada per diversos segments, i un d'ells està ressaltat amb més gruix. Marca amb el regle, en cas que puguis, el(s) segment(s) perpendicular(s) al que està ressaltat.

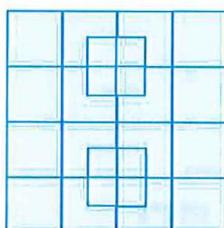


4.4.2) Nivel constitutivo de percepción visual.

En este nivel se trata de constatar que fisiológicamente predomina la percepción de figuras complementarias y no solapadas (como hemos visto en el apartado 2.3)).

El objetivo de la actividad 3) planteada es averiguar cuantos cuadrados percibe el alumno en un cuadrado grande subdividido en 16 cuadrados iguales complementarios más pequeños, y dentro del cual se solapan otros 2 cuadrados iguales a los anteriores, subdivididos cada uno de ellos en 4 cuadrados complementarios más pequeños. Partiendo de que sabemos que cada uno de los 18 cuadrados iguales mide 1 unidad de lado (por tanto el cuadrado grande inicial mide 4 unidades de lado), se pide al alumno que indique no sólo el total de cuadrados que percibe, sino más en detalle cuántos de lado 3, de lado 2, de lado 1 y de lado 1/2 de unidad encuentra. En total debe contar 40 cuadrados.

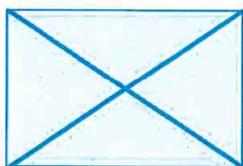
3) Quants quadrats trobes a la següent figura, sabent  que mesura 1 unitat de costat?



- Quants quadrats de costat 1/2, si n'hi ha?
- Quants quadrats de costat 1, si n'hi ha?
- Quants quadrats de costat 2, si n'hi ha?
- Quants quadrats de costat 3, si n'hi ha?
- Quants quadrats de costat 4, si n'hi ha?

En la actividad 4) se plantea una figura rectangular con sus dos diagonales marcadas, y se pide al alumno que indique cuantos triángulos encuentra, y que o bien los marque con diferentes colores, o bien los dibuje al lado. En total debería encontrar 8 triángulos, los 4 que se ven a primera vista, y los 4 que se verían si sólo dibujáramos primero una diagonal, y luego sólo la otra.

4) Quants triangles pots trobar dins de la figura següent?. Marca'ls amb diferents colors o dibuixa'ls al costat de la figura.



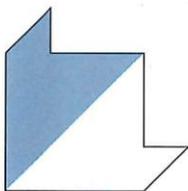
4.4.3) Nivel operativo de percepción visual.

En este nivel se trata de ver cómo cada alumno manipula mentalmente ciertas sub-configuraciones, para obtener otra disposición más o menos significativa y útil (como hemos visto en el apartado 2.3)).

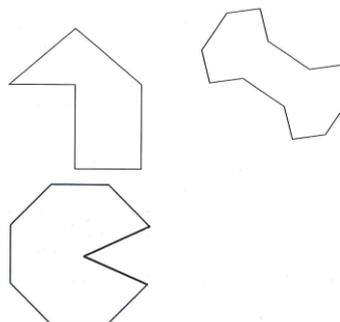
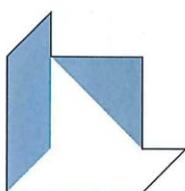
En la **actividad 5)** se le muestran al alumno tres figuras, dos de ellas **simétricas**, y una de ellas NO simétrica pero descomponible en dos figuras (triángulo isósceles y rectángulo), cada una de ellas con ejes de simetría, pero no coincidentes; se le pide que pinte la mitad del área de cada figura (teniendo una figura como ejemplo, con dos posibles soluciones). La 3ª figura planteada (la del comecocos) parece la más fácil de resolver pues una solución evidente es partirla por la mitad horizontalmente para pintar una de las dos zonas obtenidas (la superior o la inferior), pero veremos que en la práctica varios alumnos han fallado (de hecho han fallado más en esta figura que en la del hueso). En todo caso, esta figura el comecocos nos debería servir para trabajar la figura del hexágono más adelante, en la experiencia de aula (ver punto 4.6). Las otras dos figuras presentan más opciones, y la clave está en ver qué eje de simetría ha usado el alumno (en el caso de la 1ª figura hay que jugar simultáneamente con dos figuras: el triángulo que sólo permite una opción pues sólo hay un eje de simetría, y el cuadrado que tiene varios ejes de simetría y, por tanto, permite varias opciones). Sería interesante conocer el contexto de la pregunta, puesto que habría opciones que podrían ser más útiles que otras en función de lo que hipotéticamente se nos pidiera al respecto.

5) Pinta la meitat de cadascuna de les tres figures següents, com en l'exemple:

Per exemple així



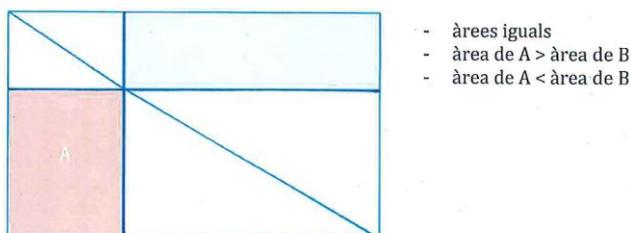
o bé així



La **actividad 6)** es la que presenta mayor dificultad en cuanto a visualización se refiere, porque ya le exige al alumno tener que mover mentalmente las sub-figuras que se

obtienen de la figura inicial, para que detecte las igualdades entre todas ellas. Partiendo de un rectángulo en el que se dibuja su diagonal y dos rectas que se cortan en un punto de esa diagonal (una paralela y otra perpendicular a la base del rectángulo), se le pide al alumno que relacione las áreas de las dos zonas no triangulares que resultan, sombreadas con distintos colores (para no confundir al alumno) e identificadas con las letras A y B, respectivamente. Se le pide que responda si ambas áreas son iguales, o si área de A es mayor o menor que área de B. La pregunta 7) será la justificación de la respuesta a esta pregunta.

6) En aquesta figura, quina és la relació entre les àrees de les dues zones ombrejades, A i B?



4.4.4) Proceso de justificación.

En la **actividad 7)** simplemente hemos pedido al alumno que justifique su respuesta a la pregunta 6), de manera informal (alumnos no iniciados aún en el lenguaje algebraico). Se trata de que el alumno explique con sus palabras qué proceso ha seguido para llegar a la conclusión de la pregunta 6). Inicialmente habíamos planteado esta pregunta como apartado b) de la pregunta 6), pero hemos visto la necesidad de añadirla como una actividad independiente para que los alumnos la vean como un ejercicio aparte, al que deben dedicar cierto tiempo (y evitar así correr el riesgo de que el alumno no tome la pregunta suficientemente en serio, sino como una prolongación del ejercicio anterior).

7) Justifica la teva resposta donada a l'exercici 6.

Para la totalidad de estas 7 preguntas, veremos en el siguiente apartado 4.5) qué indicadores hemos diseñado y utilizado para la corrección de las pruebas inicial y final, así como la comparativa entre los resultados de ambas pruebas en el apartado 4.7) tras la experiencia de aula.

Antes de pasar al siguiente apartado creemos importante comentar un tema que inicialmente se me había pasado por alto en el momento de diseñar esta prueba. Por defecto, al integrar las figuras en la actividad, éstas salían con sombras y con degradados en el relleno. Lo mismo sucedía con las líneas que iba incorporando a las figuras. Más tarde nos dimos cuenta de cómo estos elementos no escogidos por nosotros, podían afectar a la percepción visual del alumno, y no eran elementos que quisiéramos reflejar en este estudio. Por tanto, era fundamental eliminar el degradado del relleno y el sombreado, y así lo hicimos.

Y comentar también por último que, si bien en ambas pruebas los alumnos debían poner su nombre y apellidos (para poder analizar la evolución individual de los alumnos entre ambas pruebas), hemos omitido sus nombres por una cuestión evidente de protección de datos de la escuela y de los menores. Por tanto, en la prueba inicial a cada alumno le hemos asociado un número, del 1 al 25, manteniendo ese mismo número en la prueba final.

4.5) Indicadores diseñados y utilizados para la corrección de la prueba.

Focalizando el objetivo central de nuestro estudio en cuantificar e incidir en la percepción geométrica de los alumnos del primer ciclo de la ESO en el aprendizaje de la de la geometría, y tras haber diseñado nuestra prueba inicial y final basándonos en el artículo base de este trabajo y en otros aspectos como el relleno de las figuras, la precisión o la simetría, hemos diseñado también en paralelo unos indicadores de evaluación para cada una de las 7 actividades propuestas. Dentro de cada actividad, y para cada uno de los 25 alumnos de nuestra aula, hemos marcado como indicadores cada una de las cuestiones que queríamos averiguar.

El objetivo central no es ver si el alumno ha respondido correctamente a cada pregunta, sino más bien de entrar en detalle de qué respuestas ha marcado: valorar qué respuestas correctas no ha marcado, así como qué respuestas incorrectas sí ha marcado.

Y dado que las preguntas ya se han diseñado en clave de las dificultades de percepción visual y deducción geométricas que suelen encontrar los alumnos, los indicadores diseñados nos permitirán cuantificar estas dificultades, para poder llevar a cabo una comparativa entre los resultados de ambas pruebas, y poder concluir que la percepción geométrica se aprende. Dicho de otro modo, que nuestros alumnos pueden aprender técnicas y habilidades de percepción geométrica.

De esta forma corroboraremos las hipótesis de partida de este TFM por un lado, y por otro lado, profundizaremos en la investigación más allá de nuestro documento base, aportando resultados sobre aspectos más sutiles a tener en cuenta en los procesos de visualización, tales como el relleno de las figuras, la precisión y la simetría (ver apartado 4.7.3)).

Encontraremos en los **anexos 4.1. y 4.2.** las dos parrillas de evaluación (correspondientes a las pruebas inicial y final, respectivamente), donde en horizontal figuran los indicadores seleccionados para evaluar a nuestros alumnos en cuanto a percepción visual y deducción se refiere, actividad por actividad, y en vertical la lista de nuestros 25 alumnos. Detallamos a continuación los indicadores utilizados, que son de tipo cualitativo, pero que permitirán cuantificar las dificultades de aprendizaje en geometría que encuentran nuestros alumnos (si bien en ningún caso se cuantifican los resultados con una puntuación específica por alumno):

- **actividad1):** se cuantifica si el alumno ha marcado los 6 cuadrados de la serie, cuáles no ha marcado y si ha marcado alguna otra figura que no sea un cuadrado, para poder concluir cómo afecta la posición, el trazo o el relleno de las

figuras en el nivel global de percepción visual de nuestros alumnos. Haremos mención especial al tema de la precisión.

- **actividad 2):** se cuantifica si el alumno ha trazado correctamente el segmento perpendicular de cada una de las 6 figuras (dos segmentos perpendiculares en el caso de los dos cuadrados), para poder concluir si la orientación de los segmentos perpendiculares y la simetría/no simetría de las figuras condicionan el nivel global de percepción visual.
- **actividad 3):** se cuantifica cuántos cuadrados detecta el alumno en la figura presentada, y sobretodo cuales (los de rango 3 parecen ser los más difíciles de visualizar, seguidos de los de rango 2), para concluir si el solapamiento de cuadrados condiciona el nivel constitutivo de percepción visual.
- **actividad 4):** se cuantifica si el alumno visualiza únicamente los 4 triángulos complementarios que se ven en la figura que se le presenta, o es capaz también de ver los 4 triángulos que se “esconden” tras la misma (dos de ellos si conseguimos borrar mentalmente una de las diagonales trazadas, y los otros dos si borramos mentalmente la otra diagonal). Así podremos concluir si el solapamiento de triángulos condiciona el nivel constitutivo de percepción visual.
- **actividad 5):** se cuantifica hasta qué punto el alumno es capaz de operar mentalmente con las sub-configuraciones de una figura dada, detectando mitades iguales, así como las distintas posibilidades (según se usen unas simetrías u otras). De esta forma podremos concluir el nivel operativo de percepción visual del alumno; podría haber configuraciones más óptimas que otras en función de lo que se requiera.
- **actividad 6):** es un paso más allá dentro del nivel operativo de visualización. Dada una figura rectangular subdivida en partes iguales a partir de una de las diagonales principales, se le pide al alumno que relacione dos áreas sombreadas en el sentido de que determine el tamaño de una respecto la otra. Para ello el alumno debe operar mentalmente con las distintas sub-figuras.
- **actividad 7):** proceso de justificación de la pregunta 6). Se trata de que el alumno argumente con sus palabras por qué el área de ambas zonas sombreadas es la misma.

Analizaremos los resultados obtenidos en el apartado 4.7) de este trabajo, tanto de forma individual (pruebas inicial y final por separada), como la comparativa entre ambas. De esta forma podremos corroborar las hipótesis de investigación de partida, como veremos más adelante (apartado 4.7)).

4.6) Experiencia de aula llevada a cabo antes de la prueba final.

La acción diseñada trata de abarcar todos los procesos objeto de nuestro estudio: procesos de visualización, de justificación y la construcción geométrica como nexo de unión entre ambos. Para ello, y dentro de nuestra UD (“Lugares geométricos y figuras planas”), hemos seleccionado 4 actividades para una sesión completa de una hora de duración, todas ellas incluidas en una Ficha de Trabajo para el alumno que hemos repartido el mismo día de la acción, y que se encuentra en anexo (**Anexo 6**). Hemos partido de la base de las actividades propuestas en la prueba inicial y final, para tratar que exista una concordancia con los aspectos que queremos evaluar (se trata de que esta acción lleve a una mejora de los resultados de la prueba final respecto a la inicial).

Para diseñar esta experiencia de aula hemos tenido en cuenta un artículo titulado “Explorar y Descubrir para Conceptualizar en Geometría” (véase [7]), en el que se detalla un estudio de aprendizaje sobre los poliedros llevado a cabo en Colombia con la finalidad de favorecer el descubrimiento, la exploración, el aprendizaje activo y el proceso de conceptualizar, como proceso necesario para el pleno desarrollo del pensamiento espacial. Se trata de no restringir la conceptualización al establecimiento de una correspondencia ente definiciones formales con una representación visual del concepto, sino de ampliarla al establecimiento de relaciones entre conceptos, lo cual permite ampliar la imagen conceptual del objeto geométrico en particular y de otros que el estudiante conoce. Este tipo de actividades favorecen también el desarrollo del razonamiento a través de las interacciones entre estudiantes, mejoran el lenguaje geométrico, fomentan la argumentación y otorgan a los alumnos la confianza y responsabilidad necesaria para cuestionarse, indagar y validar sus apreciaciones.

En este artículo se detallan las fases de un buen estudio o experiencia de aula, que hemos aplicado también a este trabajo: indagación-planeación, ejecución-observación y revisión-reflexión. En la primera fase de indagación-planeación, y tras analizar los malos resultados arrojados por las pruebas externas en el área de geometría por un lado, y las prácticas de enseñanza de corte “transmisionista” por otro (exposición mecánica por parte del profesor), se evidencia poca apropiación y construcción de conceptos básicos de geometría. Se diseñan entonces las actividades, guías y materiales a usar en clase (en el caso de este trabajo, nos hemos centrado en las pruebas inicial y final, así como en nuestra experiencia de aula). Pasamos entonces a la fase de ejecución-observación, durante la cual llevamos a cabo la experiencia de aula (en nuestro caso de una sesión de duración), observando aspectos como la interacción profesor-alumno, la interacción alumno-alumno, la motivación o la participación. Finalmente tenemos la fase de revisión-reflexión, que veremos en los apartados 4.7) y 4.8) de este trabajo, y donde analizaremos la pertinencia de las acciones emprendidas y los ajustes a realizar para afianzar los objetivos propuestos.

Esta experiencia de aula se lleva a cabo justo antes de la prueba final (sesión 22 – 12/05/14). El objetivo primordial es estimular la visualización geométrica y la deducción/justificación de nuestros alumnos. Se trata de plantear interrogantes al alumno que requieran el aprendizaje de los contenidos de la unidad. Todas ellas se han hecho por parejas al azar, para fomentar el aprendizaje cooperativo, el diálogo y la confrontación; de esta forma abarcaríamos también la competencia social y ciudadana que apenas se ha tocado durante la impartición de la UD.

Las actividades seleccionadas son las siguientes:

1)Actividad combinada geoplano-papiroflexia: como fase previa, tenemos que mencionar que durante la impartición de mi UD, y con anterioridad a esta experiencia de aula, hemos llevado a cabo un par de actividades rápidas relacionadas con el geoplano para introducir a nuestros alumnos en el tema de áreas: en la primera actividad (**anexo 5.1**) hemos comprobado cómo la diagonal de un paralelogramo regular lo divide en dos partes iguales, que tienen la misma área (**véase [8]**); en la segunda actividad (**anexo 5.2**) hemos descompuesto las figuras objeto del tema de estudio en el geoplano para demostrar las fórmulas para el cálculo de sus respectivas

áreas (paralelogramo, triángulo, rombo, trapecio y el hexágono como polígono regular) **(véase [9])**. En ambas actividades hemos trabajado tanto el proceso de visualización, como el de justificación.

El objetivo de la acción a realizar con papiroflexia dentro de esta sesión de aula es que el alumno descubra algunas propiedades por sí mismo, manipulando el papel. Ante todo, podríamos hacerle descubrir cómo doblar un rectángulo para conseguir un cuadrado. A continuación facilitamos a cada alumno un cuadrado de papel de 8 unidades de lado, marcado con cuadrícula (ver modelo en anexo 6), y vamos planteando cuestiones: ¿qué pasa si lo dividimos por una de sus diagonales?, ¿qué dos figuras se obtienen?, ¿cómo es su área en relación a la figura original?; ¿y si lo dividimos por la mitad, horizontal o verticalmente?; se trata de que vean en este último caso, que se obtiene un rectángulo de 8 unidades de lado largo, y 4 unidades el lado corto. Y que vean visualmente (y luego calculen si quieren) qué pasa con los respectivos perímetros y áreas: mientras que el área del cuadrado es el doble que la del rectángulo (64 versus 32 unidades), el perímetro es menos del doble (32 versus 24 unidades). Luego se vuelve a doblar el rectángulo, obteniendo 4 cuadrados del cuadrado inicial, y se pide al alumno que compare el área y perímetro de este mini-cuadrado con las del cuadrado inicial. El objetivo fundamental es explorar figuras geométricas e identificar relaciones de proporcionalidad numérica y geométrica que luego pueden servir para resolver problemas de la vida cotidiana (ejemplo: zócalo y superficie de baldosas necesarias para embaldosar una habitación, y cómo se reduce la cantidad de baldosas necesarias si en lugar de ser un habitación cuadrada, partimos esa habitación por la mitad a lo largo/ancho). Con esta actividad estamos potenciando ante todo el nivel constitutivo del proceso de proceso de visualización, con cierta dosis de deducción.

2) Demostración visual del Teorema de Pitágoras: facilitamos a cada pareja de alumnos una ficha en la que hemos construido dos figuras cuadradas iguales (ver anexo 6), pero con distintas configuraciones interiores. La idea es discutir sobre si las áreas de estas configuraciones interiores son iguales o no, haciéndoles razonar sobre la igualdad de los 4 triángulos de cada uno de los cuadrados (deben sombrearlos) para que traten de llegar a la conclusión de que las áreas sobrantes en ambos cuadrados coinciden en valor. Con esta actividad potenciamos el nivel operativo del proceso de visualización, pero ante todo tratamos de obtener una justificación informal por parte de nuestros alumnos. Esta actividad está relacionada con la actividad 1 de esta experiencia de aula, en lo que se refiere a áreas de polígonos básicos como son el área del cuadrado y del triángulo. También es muy similar a las preguntas nº 6 y 7 de la prueba inicial y final, en las que se pedía una justificación similar de áreas de dos figuras sombreadas. Se trata de que el alumno se familiarice con estos procesos, y que podamos concluir que, gracias a esta actividad, un mayor porcentaje de alumnos ha respondido correctamente dichas preguntas en la prueba final versus la prueba inicial.

3) Construcción geométrica: cada pareja de alumnos debe dibujar con compás y regla un hexágono regular, de forma que vayan constatando propiedades como la igualdad entre radio y lado, o la descomposición del hexágono en 6 triángulos equiláteros. Una vez recortado el hexágono (ya se lo entregamos recortado para no perder tiempo innecesariamente), podemos jugar con él (papiroflexia), viendo de entrada la simetría de partirlo por la mitad, y cómo luego se puede ir plegando en un único triángulo equilátero

con 6 “capas” de papel. Si entonces cortan un trozo del lateral del triángulo plegado (de forma paralela al lado), sigue quedando un hexágono regular pero más pequeño. Con esta actividad fomentamos también el nivel global de visualización (por ejemplo si apoyan o no la base del hexágono, como veíamos en el apartado 3.3.a), el nivel constitutivo (hexágono formado por 6 triángulos equiláteros no solapados) y el proceso de justificación. Esta construcción geométrica es el motor del pensamiento deductivo, pues permiten al alumno descubrir propiedades que él no puso allí, lo cual le permite descubrir que hay alguna relación de implicación entre las propiedades que él puso, y las que descubrió después; por ejemplo, la igualdad entre radio y lado del hexágono, implica que se obtengan 6 triángulos equiláteros, que el alumno sólo descubrirá una vez construido el hexágono, al trazar sus diagonales. Finalmente podrá constatar que los 6 ángulos centrales y los 6 ángulos interiores de este hexágono regular son iguales (60° y 120° , respectivamente).

4)Actividad del enjambre: siguiendo con el ejemplo del hexágono, planteamos a cada pareja de alumnos el problema de la prueba diagnóstica de la Generalitat de 2011-12 (**anexo 2.2**) para que lo resuelvan (lo corregimos al final de la clase). Con esta actividad se fomentan los procesos de visualización y de justificación (pregunta 4).

En todas estas actividades estamos trabajando la competencia de generar preguntas de tipo matemático y plantear problemas, que apenas se había trabajado durante la impartición de la UD.

A la hora de diseñar esta experiencia de aula hemos tenido en cuenta también una guía del CREAMAT (**véase [10]**) en la que figuran unas preguntas que nos pueden servir de indicadores del nivel de riqueza competencial de una actividad, que dependerá no sólo de cómo se plantea la actividad (por ejemplo que estimule la curiosidad y creatividad del alumno, y que permita manipular y utilizar herramientas de dibujo), sino también de cómo se gestiona el aula (por ejemplo fomentando la autonomía del alumno de forma simultánea al trabajo en parejas, y estimulando el razonamiento). De ahí que la experiencia de aula diseñada debe ser muy rica a nivel de desarrollo de competencias por parte de nuestros alumnos.

En el **anexo 8** encontrarán los dos cuadros de competencias: en primer lugar el de las competencias básicas dentro del ámbito matemático (**véase [5]**), y en segundo lugar el de las competencias básicas para la ESO (**véase [6] y [11]**). En el cuadro resumen de la unidad didáctica (UD) impartida por mí en el centro durante mis prácticas del máster (que se puede encontrar en el **anexo 9**, se hace referencia a ambas competencias (matemáticas y de la ESO), prueba de la riqueza competencial de la impartición de la UD. No obstante, hay que tener en cuenta que en la experiencia de aula han entrado en juego competencias adicionales, como la competencia C4 del cuadro superior de competencias (generar preguntas de tipo matemático y plantear problemas) o la competencia social y ciudadana del cuadro inferior de competencias.

4.7) Comparativa de resultados iniciales y finales.

A través de los indicadores fijados para cada una de las 7 preguntas de la actividad inicial y final, podemos determinar qué porcentaje de alumnos falla en cada nivel de dificultad;

se trata de investigar qué aspectos entrañan mayor dificultad en relación a las hipótesis de investigación de partida.

De esta forma podremos concluir si la experiencia de aula llevada a cabo ha resultado o no eficiente y ha conferido a nuestros alumnos una mayor capacidad de visualización y de razonamiento, fundamentales para enfrentarse a otros retos y construcciones geométricas de cursos posteriores. Para ello compararemos los resultados de las pruebas inicial y final. Recordemos que podemos encontrar la prueba en el anexo 3.

Antes de adentrarnos en los resultados de ambas pruebas y la comparativa entre ellas, debemos indicar que, como es lógico, la nota final de la materia cuatrimestral de geometría no se puede ver influenciada en absoluto por este plan de acción (pruebas inicial y final, y experiencia de aula). En primer lugar porque debemos seguir los mismos criterios de evaluación que los usados con los alumnos que cursaron la materia durante el primer cuatrimestre y que, por tanto, no tuvieron la oportunidad de hacer estas actividades. Y en segundo lugar, porque no queremos que sufran ni que se pongan nerviosos con esta cuestión que tanto les inquieta siempre, sino todo lo contrario, que estén relajados y que disfruten de las actividades que les he preparado. Así se lo hemos hecho saber desde la sesión previa a la actividad inicial.

No obstante, lo que sí queda claro es que con este plan de acción global sí que estamos de alguna manera contribuyendo a la evaluación, para que además de continua, sea formativa (encaminada a mejorar el proceso de aprendizaje del alumno), formadora (co-evaluación y trabajo cooperativo) y diferenciada para cada alumno (tratamiento especial a un alumno con necesidades educativas especiales).

4.7.1) Evaluación resultados prueba inicial.

Tan sólo un alumno, de entre los 25 que han realizado la prueba inicial, ha realizado correctamente todas las actividades propuestas, justificación inclusive (si no tenemos en cuenta las actividades 6 y 7, estrechamente relacionadas, serían 3 los alumnos que han realizado correctamente el resto de actividades: alumnos 1, 10 y 17). A continuación vamos a ver el desglose de resultados actividad por actividad, sin perder de vista la correspondiente parrilla de indicadores de evaluación (anexo 4.1). Las pruebas iniciales cumplimentadas por cada uno de los 25 alumnos se pueden ver en el anexo 10, otorgando a cada alumno un sub-número de anexo (**10.1, 10.2, hasta 10.25**).

Actividad 1): como hemos visto en los apartados 4.4.1) y 4.5) relativos a esta actividad, el alumno debía marcar como cuadrados 6 de las 12 figuras propuestas. Sólo 10 alumnos han respondido satisfactoriamente a esta pregunta, lo cual representa un error del 60% de los alumnos. En primer lugar tenemos que indicar que 14 de los 25 alumnos ha marcado la figura “polémica” como un cuadrado, cuando en realidad no lo es, aunque visualmente pueda parecerlo (mide 1,28 x 1,39 mm); los alumnos deberían ser más rigurosos y haber medido esta figura. Sin embargo, si no consideramos la precisión (hablaremos de ella más adelante, en el punto 4.7.3)), concluimos que son 21 alumnos los que han respondido correctamente, con lo que el porcentaje de error desciende hasta el 16%. De entre los 4 restantes, sólo uno ha marcado una figura que no lo era (alumno

8), y los otros 3 no han marcado uno de los cuadrados que se debían marcar (alumnos 6, 14 y 18): un alumno ha marcado un cuadrado en posición “girado”, otro un cuadrado con relleno y otro el pentágono irregular; nada remarcable. Por tanto, y siguiendo con nuestro documento base en cuanto a percepción global se refiere, podemos concluir que **la posición de la figura, el tipo de trazo y el relleno apenas condicionan el nivel global de percepción visual de nuestros alumnos** (ningún alumno ha dejado de marcar un cuadrado por el mayor o menos grosor del trazo).

Actividad 2): como hemos visto en los apartados 4.4.1) y 4.5) relativos a esta actividad, el alumno debía marcar para cada una de las 6 figuras planteadas, el segmento perpendicular al resaltado en cada caso (dos segmentos para cada uno de los dos cuadrados propuestos). De las 8 perpendiculares que se debían marcar, tan sólo 7 alumnos de los 25 las han marcado todas correctamente, lo cual supone un porcentaje de error del 72%.

Analizando las respuestas de nuestros alumnos en relación a las dos figuras  constatamos que 2 alumnos fallan si colocamos la diagonal en un sentido (), y hasta 8 (el cuádruple) si la colocamos en el sentido contrario (). Este hecho indica claramente que la posición (en este caso, la orientación de la diagonal) sí influye en el nivel global de percepción visual (en total falla esta pregunta un 40% de los alumnos).

Finalmente, si analizamos las respuestas en relación a las figuras 3 y 8 de la prueba, vemos que sólo 1 alumno falla la figura en la que hay simetría, frente a 4 alumnos que fallan la que no tiene simetría. Esto nos indica claramente que la simetría o falta de simetría en una figura también condiciona el nivel global de percepción visual (en total falla esa pregunta un 20% de nuestros alumnos). Analizaremos el tema de la simetría en el apartado 4.7.3), dentro de la actividad 5.

En total 14 alumnos fallan la actividad de los cuadrados, que supone un 56% del total: de entre éstos, hay uno que sólo marca una sola perpendicular de las dos posibles en cada cuadrado, y hay 5 que marcan las dos diagonales del cuadrado como perpendiculares al lado resaltado, lo cual me lleva a pensar en un problema de comprensión del enunciado por parte de los alumnos, al marcar las dos diagonales del cuadrado (que sí son perpendiculares entre sí), en lugar de marcar los dos lados perpendiculares al resaltado; el resto de estos 14 (8 alumnos en total) NO marcan nada, lo cual me parece sorprendente, e indica claramente que cuando resaltamos un lado de la figura (en lugar de otro segmento como la diagonal) parece que les cuesta mucho más. Por tanto, podemos afirmar que nuestros alumnos sí **fallan en la relación de la parte con el todo: nivel constitutivo de percepción** (error del 56% en esta actividad).

Actividad 3): como hemos visto en los apartados 4.4.2) y 4.5) relativos a esta actividad, el alumno debía contar el número de cuadrados que percibía en un cuadrado grande subdividido en 16 cuadrados iguales de lado 1 unidad y complementarios entre sí, dentro del cual se solapaban además otros 2 cuadrados iguales también de una unidad subdivididos a su vez cada uno en 4 mini cuadrados (y, por tanto, cada uno de lado $\frac{1}{4}$ de unidad). Para facilitar que el alumno comprenda bien lo que se le está pidiendo, se le especifica que detalle cuántos cuadrados encuentra de lado $\frac{1}{4}$ de unidad, de lado 1 unidad, de lado 2 unidades, de lado 3 unidades y de lado 4 unidades. En total debe contar 40 cuadrados.

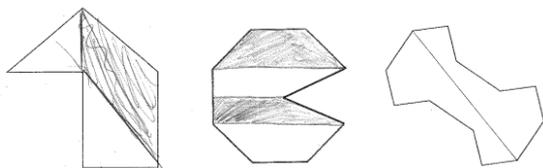
A priori constatamos que sólo 7 alumnos de los 24 que responden a esta pregunta, responden correctamente a la pregunta, lo cual significa un error del 71% de nuestros alumnos. Hay que destacar que todos estos que fallan (17 en total), lo hacen en los de lado 2 unidades (71%): más de un tercio (7 alumnos) confirman haber visto 4 cuadrados de lado 2, que de hecho era la respuesta errónea más esperada, puesto que suponía contar únicamente los cuadrados de lado 2 no solapados. Además, de entre éstos 17, 10 fallan también en los de lado 3 unidades, más la mitad de los cuales (6 en concreto) indican que sólo perciben un cuadrado de lado 3, como también cabía esperar. Por tanto, queda bien claro que **el solapamiento de figuras (en este caso de cuadrados) condiciona en gran medida el nivel constitutivo de percepción visual**.

No obstante, a priori me pareció que a los alumnos les costaría más visualizar los cuadrados de rango 3 que los de rango 2 (personalmente yo conté 36 cuadrados de entrada, sin visualizar ninguno de rango 3), pero al parecer han fallado más con los rango 2.

Actividad 4): como hemos visto en los apartados 4.4.2) y 4.5) relativos a esta actividad, el alumno debía indicar cuantos triángulos encontraba en la figura rectangular  dada, y cuáles.

Como era previsible, sólo 13 de los 24 alumnos (el alumno 16 no tenía que responder a esta pregunta) han respondido correctamente, de forma que el porcentaje de error es del 46% (me lo esperaba más alto, francamente). De los 11 alumnos que han respondido erróneamente, 7 han marcado sólo 4 triángulos (en lugar de los 8 triángulos que era la respuesta correcta), que era la respuesta más esperada. Por tanto, podemos concluir nuevamente que **el solapamiento de figuras (en este caso de triángulos) condiciona el nivel constitutivo de percepción visual**, aunque en menor proporción que en la actividad anterior.

Actividad 5): como hemos visto en los apartados 4.4.3) y 4.5) relativos a esta actividad, se le pide al alumno pinte o marque la mitad del área de cada una de las tres figuras dibujadas. Sorprendentemente 16 de los 25 alumnos realizan satisfactoriamente esta “triple” actividad, lo cual sólo supone un error del 36% de los alumnos. Lo que más sorprende es algunas de las opciones marcadas por los alumnos, con unas simetrías que a mí al menos no se me habrían ocurrido, incluso para la figura del “comecocos” que parecía tener una opción más fácil (partirla por la mitad, horizontalmente).



De las 3 figuras planteadas, nadie ha fallado en la del “hueso”, y sólo 2 alumnos en la del “comecocos” (como hemos visto, esta figura ha servido para entrar en contacto de antemano en la prueba inicial con la figura del hexágono, trabajada a posteriori a fondo en la experiencia de aula). Un total de 8 alumnos ha fallado la 1ª figura, que representa un error del 32% de los alumnos. Si en la actividad no se hubiera planteado esta figura, el error bajaría hasta el 8% de los alumnos. Por tanto, podemos concluir que el hecho de

que haya un eje de simetría (de forma implícita), ayuda considerablemente a nuestros alumnos, puesto que fallan significativamente más cuando no hay un eje de simetría (1ª figura con dos sub-figuras, cada una con su(s) eje(s) de simetría). Analizaremos el tema de la simetría (visto también en la actividad 2) en el apartado 4.7.3).

Para concluir, podríamos decir que **gran parte de nuestros alumnos es capaz de operar mentalmente con las sub-configuraciones de una figura dada**, detectando mitades iguales, sobre todo cuando hay un eje de simetría; y que algunos de ellos marcan unas posibilidades que indican un alto nivel operativo de percepción visual; habría que ver qué configuraciones serían más óptimas en función de lo que se pidiera.

Actividades 6 y 7): como hemos visto en los apartados 4.4.3), 4.4.4) y 4.7) de este trabajo, estas actividades son las que presentan mayor dificultad en cuanto a visualización (actividad 6) y justificación (actividad 7). La actividad 6 exige al alumno tener que mover mentalmente las sub-figuras que se obtienen de la figura inicial, para detectar las igualdades entre todas ellas, y poder concluir que las dos áreas sombreadas son iguales. De los 24 alumnos que han realizado esta actividad, sorprende de entrada que la mitad haya respondido correctamente a la pregunta 6 (error del 50% del total de alumnos). Pero al analizar en detalle sus deducciones (respuesta a pregunta 7), vemos que tan sólo 3 de estos 12 alumnos han dado una justificación correcta (el resto ha argumentado una misma superficie, a ojo, o bien midiendo con regla y calculando ambas áreas).

Una argumentación informal de la equivalencia de las áreas de los rectángulos sombreados sería:

- en el rectángulo ABCD se distinguen dos triángulos congruentes ABC y ADC, resultado de dividir el rectángulo mediante una diagonal
- si se elimina la porción sombreada en cada uno de los triángulos, se obtienen dos figuras compuestas por dos triángulos que son respectivamente congruentes
- como han quedado dos regiones de igual área, las regiones que se eliminaron (es decir, los rectángulos sombreados), también deben tener igual área.

A continuación mostraremos las respuestas escritas por estos 3 alumnos que han justificado correctamente (alumnos 1, 5 y 22, respectivamente), si bien queda patente que sus respuestas distan mucho de la argumentación informal dada a título de ejemplo:

Son iguals porque la figura gran esta partida per la meitat i els espais en blanc son iguals

Este alumno justifica correctamente, pero es muy escueto.

Lo que son iguales, porque una es más amplia, más alta; el otro es más ancho, pero más bajo, y porque los triángulos son iguales.

La primera parte de su deducción no es correcta. La segunda parte ("los triángulos son iguales") sí es correcta, pero le faltaría la primera parte de la justificación (el rectángulo original está dividido por la mitad por su diagonal). Y debería añadir que dado que los 4 triángulos sobrantes al eliminar las áreas sombreadas son congruentes 2 a 2 y que, por tanto, las zonas sombreadas también deberían tener igual área.

Porque lo que A es más ancho por lo que es más alto; lo que B es más ancho pero más bajo.

Y como que el triángulo C y D son iguales y el triángulo E y F los otros triángulos A y B también lo son.

Al igual que en el caso anterior, la primera parte de su deducción no es correcta. La segunda parte (en la que ha identificado los 4 triángulos correctamente con las letras C, D, E y F) sí es correcta, pero le faltaría la primera parte de la justificación (el rectángulo original está dividido por la mitad por su diagonal). En este caso sí comenta correctamente que, dado que estos 4 triángulos son congruentes 2 a 2, las zonas sombreadas también lo son.

Por tanto, debemos concluir que si bien la mitad de las respuestas a esta actividad 6 son correctas, no podemos concluir que el motivo sea un buen nivel operativo de percepción visual por parte de nuestros alumnos. El hecho de no haber sabido justificarlo con sus propias palabras, demuestra que en la mayoría de casos la respuesta se ha hecho o bien "a ojo", o bien midiendo los lados para calcular las áreas de las zonas sombreadas. Pero la finalidad de esta actividad era deducir la igualdad de áreas como consecuencia de haber operado mentalmente con la figura inicial, detectando propiedades y similitudes entre figuras (encadenamiento lógico-deductivo de afirmaciones). Por tanto, **detectamos dificultades por parte de nuestros alumnos en este estadio superior de nivel operativo de percepción visual.**

4.7.2) Evaluación resultados prueba final.

No entraremos a fondo en analizar los resultados de esta prueba final en sí, sino básicamente como comparativa con la prueba inicial. Nuestro interés se centrará en el punto de partida de nuestros alumnos en cuanto a la percepción y justificación se refiere, y el punto de llegada tras tres meses con ellos: el objetivo es estudiar la evolución de

nuestros alumnos en este período de tiempo, y ver hasta qué punto la experiencia de aula, junto con alguna otra pequeña y puntual acción llevada a cabo durante la impartición de mi UD, han servido para que nuestros alumnos superen parte de sus dificultades de aprendizaje de la geometría.

Al igual que en la prueba inicial, tan sólo un alumno (alumno 10) ha realizado correctamente todas las actividades propuestas de esta prueba final, justificándose inclusive (si no tenemos en cuenta las actividades 6 y 7, serían 3 los alumnos que han realizado correctamente el resto de actividades: alumnos 1, 10 y 12).

Sólo comentaremos brevemente a continuación los resultados de cada actividad, sin perder de vista la correspondiente parrilla de indicadores de evaluación (anexo 4.2). Las pruebas finales cumplimentadas por cada uno de los 25 alumnos se pueden ver en el **anexo 11**, otorgando a cada alumno un sub-número de anexo (**11.1, 11.2, hasta 11.25**).

Actividad 1): sólo 8 alumnos han respondido satisfactoriamente a esta pregunta (frente a los 10 de la prueba inicial), lo cual representa un error del 68% de los alumnos. Si excluimos la figura “polémica” (marcada erróneamente como un cuadrado por 15 alumnos, uno más de los de la prueba inicial), concluimos que son 23 alumnos los que han respondido correctamente, con lo que el porcentaje de error desciende hasta el 8% (frente al 16% de la prueba inicial). Dado que los fallos de los dos alumnos que han fallado no son significativos (un mismo alumno no ha marcado los cuadrados 1, 2 y 3, dos de los cuales sí había marcado correctamente en la prueba inicial, entiendo que por despiste; y otro alumno no ha marcado el cuadrado 5 con relleno y trazo grueso, suponemos que también por despiste pues sí lo marcó en la prueba inicial), concluimos nuevamente que **la posición de la figura, el tipo de trazo y el relleno apenas condicionan el nivel global de percepción visual de nuestros alumnos.**

Actividad 2): de las 8 perpendiculares que se debían marcar, 14 alumnos de los 25 las han marcado todas correctamente (frente a 7 de la prueba inicial), lo cual supone un porcentaje de error del 44% (ha bajado en 28 puntos porcentuales, desde el 72%). En cuanto a los dos romboïdes, afirmamos una vez más que **la orientación de la diagonal sí influye en el nivel global de percepción visual**, pero los resultados globales han mejorado (falla esta pregunta un 20% de los alumnos frente al 32% de la prueba inicial). Lo mismo sucede con los resultados de las figuras 3 y 8, donde la **simetría o falta de ella condiciona el nivel global de percepción visual**, pero el porcentaje de error baja en 8 puntos porcentuales (del 16 al 8%). Finalmente, también en las figuras cuadradas hay importantes mejoras, pues ahora fallan 6 alumnos (frente a los 14 de la prueba inicial), bajando el porcentaje de error del 56 al 24%; de estos 6, 2 NO marcan nada, 1 marca la diagonal, otro marca sólo una de las perpendiculares y 2 marcan una recta perpendicular pero que pasa por el centro del cuadrado, lo cual nos permite reconfirmar que nuestros alumnos **fallan en el nivel constitutivo de percepción** (relación de la parte con el todo), si bien los resultados han mejorado claramente.

Actividad 3): 9 alumnos sobre 24 han respondido correctamente a la pregunta (dos más que en la prueba inicial), lo cual significa un error del 63% de nuestros alumnos. Siguen fallando mucho en los de lado 2 unidades (14 en total), que representa un 58% de error (frente al 71% de la prueba inicial); pero se acercan más a la respuesta correcta (casi un tercio confirma haber visto 8 cuadrados de lado 2 de los 9 que hay, cuando en la prueba

inicial ese mismo tercio sólo percibía 4 cuadrados). También siguen fallando en los de lado 3 unidades (9 en total frente a los 10 de la prueba inicial), pero también en este caso se acercan más a la respuesta correcta (ahora sólo 4 alumnos perciben sólo un cuadrado, frente a los 7 de la prueba inicial, de modo que tres alumnos han mejorado su respuesta: uno de ellos respondiendo correctamente y los otros dos acercándose más a la respuesta correcta). Si bien los resultados mejoran, continúa quedando patente que **el solapamiento de figuras (en este caso de cuadrados) condiciona en gran medida el nivel constitutivo de percepción visual.**

Actividad 4): 15 alumnos han respondido correctamente a esta cuestión (frente a los 13 de la prueba inicial), lo que representa un porcentaje de error del 38% (frente al 46% de la prueba inicial). Pero además los resultados se han aproximado más al resultado correcto puesto de que 8 alumnos que han respondido en ambas pruebas que había sólo 4 o 6 triángulos (cuando la respuesta correcta es de 8), en la prueba inicial sólo uno respondió que había 6 triángulos (los otros 7 dijeron 4 triángulos), frente a los 4 que en la prueba final han encontrado 6 triángulos (y los otros 4 sólo 4 triángulos). Es decir, que de estos 8 alumnos, 3 han aproximado más su respuesta. Podemos concluir que, si bien los resultados mejoran considerablemente (más respuestas correctas, y mayor aproximación de las respuestas incorrectas), **el solapamiento de figuras (en este caso de triángulos) condiciona el nivel constitutivo de percepción visual**, aunque en menor proporción que en la actividad anterior.

Actividad 5): no hay grandes avances en los resultados de esta actividad, pues contamos con el mismo número de aciertos (16 alumnos) y, por tanto, se mantiene el porcentaje de error en un 36% de los alumnos. Mismos resultados en cada una de las 3 figuras planteadas: nadie ha fallado en la del “hueso”, 2 alumnos en la del “comecocos” y 8 alumnos en la 1ª figura (que representa un error del 32% de los alumnos). Lo curioso es que hemos detectado dos alumnos (el 18 y el 20) que han fallado la 1ª figura en la prueba final, pero que no la fallaron en la inicial (suponemos que no se han fijado bien); y, por tanto, hay dos alumnos que han mejorado en esta 1ª figura (el 2 y el 19). A grandes rasgos concluimos que no hay mejoras significativas en esta actividad (sólo dos alumnos han mejorado), y casi todo el error se produce en la 1ª figura que es la única que no presenta eje de simetría. Por tanto, nos reafirmamos en nuestra conclusión de la prueba inicial sobre esta actividad: el hecho de que haya un eje de simetría (de forma implícita), ayuda considerablemente a nuestros alumnos, puesto que fallan significativamente más cuando no hay un eje de simetría (1ª figura). También reconfirmamos que **gran parte de nuestros alumnos es capaz de operar mentalmente con las sub-configuraciones de una figura dada**, detectando mitades iguales, sobre todo cuando hay un eje de simetría; y que algunos de ellos marcan unas posibilidades que indican un alto nivel operativo de percepción visual; habría que ver qué configuraciones serían más óptimas en función de lo que se pidiera.

Actividades 6 y 7): sólo un alumno más que en la prueba inicial ha respondido bien a esta pregunta (13 en lugar de 12), con lo que el porcentaje de error mejora levemente (del 50 al 46%). Lo sorprendente en este caso es que 4 alumnos han pasado de responder incorrectamente a hacerlo correctamente (alumnos 4, 18, 20 y 23), pero 3 alumnos viceversa (alumnos 9, 10 y 14). En todo caso, y dado que ninguno de estos 7 alumnos ha justificado correctamente su respuesta ni en la prueba inicial ni en la final,

achacamos estos cambios a percepciones distintas de áreas en el momento de realizar ambas pruebas, y no a una mejoría o empeoramiento de sus habilidades de percepción visual.

Si analizamos en detalle sus deducciones (respuesta a pregunta 7), vemos que tan sólo 3 de estos 12 alumnos han dado una justificación correcta, igual que en la prueba inicial. Pero nuevamente sorprende que no son los mismos: los alumnos 1 y 22 siguen respondiendo correctamente (a continuación veremos sus justificaciones de la prueba final), pero el alumno 5 que justificó correctamente en la prueba inicial (aunque su respuesta era correcta, era incompleta puesto que sólo afirmaba que “los triángulos eran iguales”), ahora lo ha hecho incorrectamente (se ha limitado a confirmar que el área de ambos rectángulos sombreados es base por altura). Por fortuna, el alumno 21 que respondió incorrectamente en la prueba inicial, ahora lo ha hecho correctamente.

A continuación mostraremos las respuestas escritas por estos 3 alumnos que han justificado correctamente esta pregunta en la actividad final (alumnos 1, 21 y 22, respectivamente):

Si porque la diagonal de la figura gran (el total) divideix en dos parts iguals i els espais en blanc son iguals respectivament per tant, els espais ombregats ocupen l'espai que queda per tant, son iguals

Este alumno (alumno 1) continúa justificando correctamente su respuesta, pero esta vez su respuesta está más detallada y es más completa.

Es un ~~rectángulo~~ rectángulo, ~~es~~ partit per la meitat per tant en cada triángulo rectángulo format te la mateixa superfície. I ocupen dos figures blanques el mateix, en cada part. I com els dos son rectangles es la mateixa fórmula. (b · c)

Este alumno responde correctamente, aunque quizás no se expresa del todo bien. Tras haber confirmado que las figuras blancas ocupan la misma superficie, le faltaría concretar que, por tanto, las zonas sombreadas también deben tener la misma superficie. La parte final no procede (no es necesario hacer ninguna alusión a la fórmula del área del rectángulo).

- 1) Perquè per calcular l'àrea multipliquem base \cdot h i el resultat és el mateix que multipliquem els dos costats són iguals
- 2) Perquè les altres figures són iguals i així els diu que les altres també. Perquè la diagonal parteix la figura els dos costats iguals.

Al igual que en la prueba inicial, la primera parte de su deducción no es correcta. La segunda parte se puede dar como correcta, si se interpreta con buena fe lo que el alumno no expresa bien. Entiendo que quiere decir que la diagonal parte la figura dada en dos partes iguales, de forma que si las zonas blancas son iguales, las zonas sombreadas también deben ser iguales. En todo caso, si bien es cierto que este alumno justificó de forma más formal su respuesta en la prueba inicial, no mencionó que la diagonal del rectángulo inicial partía la figura en dos partes iguales, algo que sí menciona ahora.

Por tanto, y dado que apenas se aprecian mejoras en ambas actividades, concluimos con lo dicho en la prueba inicial, **nuestros alumnos tienen dificultades en este estadio superior de nivel operativo de percepción visual y en el nivel de justificación (sólo un 13% ha sabido justificar con sus propias palabras su respuesta).**

4.7.3) Comparativa resultados pruebas inicial y final.

En primer lugar, debemos recordar que entre la prueba inicial y la final hemos impartido mi UD (tres temas sobre los cinco de la optativa cuatrimestral). Como hemos comentado, si bien la materia se imparte de forma tradicional, se fomenta el uso de compás y regla en la medida de lo posible: no sólo hemos construido rectas paralelas y perpendiculares con regla y escuadra, sino también mediatrices y bisectrices obligando al alumno a hacerlo con el compás (siendo éste último prescindible, puesto que sería suficiente con regla, escuadra y transportador de ángulos).

Por otro lado, el centro me ha permitido introducir alguna pequeña actividad fuera de lo estipulado, encaminada al objetivo central mejorar el aprendizaje de la geometría por parte de nuestros alumnos. Hemos “jugado” con rectas y figuras en distintas posiciones (ejemplo bien claro serían las diferentes posiciones en que hemos posicionado los triángulos rectángulos para aplicar el Teorema de Pitágoras), y hemos planteado preguntas varias que obligaban a nuestros alumnos a pensar (ejemplo de ello es la comparativa entre los ángulos interiores y centrales de polígonos regulares varios, para constatar que a medida que aumentamos el número de lados del polígono, aumenta el valor del ángulo interior, mientras que el central disminuye su valor, como es lógico). También hemos hecho alguna pequeña demostración visual (como la de la suma de los ángulos interiores de un triángulo que es siempre de 180°), y dos actividades de geoplano relacionadas con el tema central de nuestra UD: Figuras planas y áreas (anteriormente detalladas en el apartado 1) del punto 4.6).

Por tanto, y si bien es cierto que durante estos casi 3 meses hemos impartido la materia que les ha permitido a nuestros alumnos aprender nuevos conceptos y contenidos, y que hemos introducido pequeñas acciones para minimizar las dificultades que encuentran en su aprendizaje, **lo que pretendemos evaluar en nuestras pruebas inicial y final no son conocimientos en sí, sino más bien las dificultades encuentran en los procesos de percepción y deducción.** Y comparando los resultados entre ambas pruebas podemos evaluar si podemos incidir en nuestros alumnos, minimizando las dificultades que encuentran en el aprendizaje de la geometría.

Como hemos visto, un solo alumno ha realizado correctamente todas las actividades propuestas en la prueba inicial y final (alumno 10), y sólo 3 alumnos han respondido bien todas las actividades excepto las dos últimas 6ª y 7ª (comparación de áreas y justificación): alumnos 1, 10 y 17 en la prueba inicial (éste último falló la actividad 3 de la prueba final) y alumnos 1, 10 y 12 en la prueba final (éste último sólo falló la actividad 3 de la prueba inicial).

Resumiremos a continuación en un cuadro los porcentajes de error por actividad, comparando los de la prueba inicial con los de la prueba final, y añadiendo ciertos comentarios (resumen de lo ya comentado en el punto anterior 4.7.2):

Porcentaje error	Prueba inicial	Prueba final	Comentarios
Actividad 1(*)	16%	8%	(*) Porcentajes sin tener en cuenta la figura “polémica” del rectángulo que parece un cuadrado
Actividad 2	72%	44%	El doble de alumnos ha realizado esta actividad correctamente en la prueba final versus la inicial; además, ha habido mejoras en las 6 figuras propuestas.
Actividad 3	71%	63%	Mejora cuantitativa, pero sobretodo cualitativa (las respuestas incorrectas de los alumnos se han acercado más a las correctas, sobre todo para los cuadrados de lado 2 y 3 unidades).
Actividad 4	46%	38%	Mejora cuantitativa, pero sobretodo cualitativa (las respuestas incorrectas se han acercado mucho más a la correcta).
Actividad 5	36%	36%	Sin cambios, pues siguen siendo 16 los alumnos que responden correctamente , pero 2 de éstos han cambiado (2 han empeorado, y 2 han mejorado)
Actividad 6	50%	46%	Sin grandes cambios. Creemos no es muy indicativo pues hasta 7 alumnos han cambiado su respuesta, y ninguno de ellos la ha justificado correctamente.
Actividad 7	88%	88%	Como comentado, en cada prueba sólo 3 alumnos han justificado correctamente su respuesta (siempre de forma informal).

Recordemos que todas las actividades han sido realizadas por los 25 alumnos, salvo las actividades 3, 4, 6 y 7 realizadas sólo por 24 alumnos (el alumno 16 no ha tenido que responder al resto de actividades por tener necesidades educativas especiales). Y que gran parte de los datos e información indicados en este cuadro se pueden cotejar comparando la parrilla de indicadores de evaluación de ambas pruebas inicial y final.

Todos los alumnos han realizado la prueba inicial, la experiencia de aula y la prueba final (25 alumnos), sin excepción alguna. Por tanto, no hemos de considerar casos especiales.

Comentarios por actividad:

Actividad 1: es en esta actividad en la que hemos obtenido mejores resultados, pues sin contar la figura “polémica” el porcentaje de acierto es del 92% (apenas fallan), con lo que podemos afirmar que nuestros alumnos tienen asimilado el nivel básico global de

percepción visual. Pero está claro que les falta rigor matemático puesto que casi un 60% de nuestros alumnos deberían haber medido la figura “polémica” para confirmar que no es un cuadrado, sino un rectángulo; por tanto, constatamos una gran falta de precisión (“accuracy”), aspecto que hemos medido al margen de los aspectos de visualización comentados en nuestro documento base de trabajo. De ahí que debamos dar ejemplo de precisión en todas las pruebas y actividades que planteemos a nuestros alumnos, incluidas las pruebas diagnósticas de la Generalitat, como hemos visto en el apartado 3.3) de este trabajo.

Actividad 2: es la actividad en la que más han mejorado (28 puntos porcentuales), y creemos que ello se debe a que hemos trabajado mucho en clase el tema de la perpendicularidad, no sólo al trazarlas (en bisectrices y mediatrices), sino en todas las aplicaciones del teorema de Pitágoras (alturas de triángulos, apotemas, etc). Confirmamos pues que nuestros alumnos tienen asimilado el nivel básico de percepción visual.

Actividad 3: en mi opinión es una de las actividades más difíciles, que requiere en primer lugar comprender bien el enunciado (costó lo suyo que los alumnos entendieran lo que les pedía), y también gran capacidad de percibir figuras solapadas. Si bien habíamos trabajado el geoplano, el tema del solapamiento creo que es un tema en el que hay que insistir, con mucha práctica. En todo caso, ha quedado claro que han entendido mucho mejor esta actividad en la prueba final que en la inicial. Además, los resultados han mejorado cuantitativamente (el error baja 13 puntos porcentuales en los de lado 2, y 4 puntos los de lado 3) y cualitativamente (mayor aproximación de las respuestas incorrectas a las correctas). Afirmamos que nuestros alumnos están asimilando el nivel constitutivo de percepción visual.

Actividad 4: en esta actividad se da una mejora en 8 puntos porcentuales, y además también resultados más aproximados a la respuesta correcta. Es la 3ª en la que menos fallan, seguida muy de cerca por la actividad 5. Reconfirmamos que nuestros alumnos están asimilando el nivel constitutivo de percepción visual.

Actividad 5: apenas hay mejora (dos alumnos mejoran frente a dos que empeoran), pero el resultado es bueno (64% de acierto).

Tanto en esta actividad 5 como en la actividad 2, queda patente que **la falta de simetría dificulta la percepción visual de nuestros alumnos, pues creemos que no saben descomponer una figura en sus sub-figuras.** Si bien es un aspecto que hemos tratado de forma adicional a los aspectos de visualización comentados en nuestro documento base de trabajo, no es preciso profundizar en el tema de la simetría, pues que es precisamente el caso simétrico en que nuestros alumnos resuelven más fácilmente.

Queremos insistir en el hecho que en ciertas actividades (5 y 7 por ejemplo) hay alumnos que han empeorado sus resultados, pasando de responder correctamente en la prueba inicial a hacerlo incorrectamente en la final. Hemos analizado sus respuestas, llegando a la conclusión de que en ningún caso se trata de una pérdida de habilidades de percepción visual, sino más bien de despistes por no haber prestado la suficiente atención, o por tener momentos de mayor o menor lucidez. Por tanto, nuestros resultados reales son ligeramente mejores a los indicados en la tabla anterior. En la actividad 6 se

repite este “fenómeno”, pero creo que en general los alumnos responden más al azar a esta pregunta, dejándose llevar por lo que perciben a primera vista (comparación entre dos áreas sombreadas de una misma figura) o midiendo los lados del rectángulo con la regla para calcular las áreas mediante su fórmula. Ejemplo de ello serían los alumnos 18 y 20 que han empeorado en la actividad 5, pero han mejorado en la 6.

Y también podemos afirmar que las justificaciones a la pregunta 7 han sido más precisas y razonadas, en términos generales. Muchas de las respuestas (sobre todo en la prueba final) han venido dadas en términos del área de las dos zonas sombreadas, probablemente porque acabábamos de estudiar en clase las fórmulas de las áreas de figuras planas. A pesar de esta mejora cualitativa, creemos que los resultados a esta pregunta 7 podrían haber mejorado también cuantitativamente puesto que hemos visto dos demostraciones visuales del Teorema de Pitágoras: una el mismo día que explicamos el teorema (incluso los alumnos la dibujaron en sus libretas) y otra en la experiencia de aula (sesión 22). Pensamos que los motivos de no haber obtenido una mejora significativa son varios, pero destacamos dos: la dificultad de nuestros alumnos en el aprendizaje de la geometría (es un proceso lento y hay que pasar por todas las etapas) y la falta de concentración y de atención generalizadas, especialmente cuando saben que la materia no entrará en el examen (no cuenta como nota).

Lo que sí es evidente, y así lo demuestra en parte lo que acabamos de comentar, es que los alumnos no se acordaban en absoluto de la prueba inicial en el momento de realizar la prueba final, de forma que en este aspecto acertamos en nuestra decisión de una única prueba.

4.8) Conclusiones, crítica constructiva y valoración por parte de los alumnos.

Conclusiones.

Como acabamos de ver en el apartado anterior, y echando un vistazo comparativo entre las parrillas de evaluación inicial y final, podemos concluir que hay **significativas diferencias entre los resultados de la prueba inicial y los de la prueba final**. Si bien es cierto que a nivel cuantitativo los resultados mejoran significativamente únicamente en la actividad 2, también lo es que en ninguna actividad empeoran los resultados (el resto de actividades también mejoran, salvo la 5 y la 7, cuyos resultados permanecen invariables). Y recordemos añadir el factor “despiste” que ha motivado que alumnos que respondieron correctamente a algunas cuestiones en la prueba inicial, lo hayan hecho incorrectamente en la prueba final, de forma que el éxito sería algo mayor.

Pero **sobretudo los resultados han mejorado cualitativamente**, como hemos visto en el apartado anterior. Muchas de las respuestas incorrectas se han aproximado más a la respuesta correcta en la prueba final, sobre todo en las actividades 3 y 4.

Constatamos que los resultados han mejorado más en las actividades de menor nivel de dificultad (actividades 1 a 4), y que apenas lo han hecho en las de mayor nivel (actividades 5 a 7). Creemos que esto se debe al hecho que nos hemos centrado fundamentalmente en los niveles inferiores de percepción, como es lógico, pues nuestro

alumnos partían prácticamente de cero en procesos de percepción visual, y tenemos muy claro que no podemos pasar a un estadio sin haber asimilado el estadio anterior. De hecho tanto en nuestra experiencia de aula como durante la impartición de la unidad didáctica hemos introducido actividades más encaminadas a la percepción visual que a la justificación (de hecho sólo hemos hecho un par de demostraciones visuales del Teorema de Pitágoras). Y dentro de la visualización nos hemos basado en los niveles global y constitutivo, dejando el nivel operativo para una etapa posterior.

Las actividades “extra” llevadas a cabo (geoplano, papiroflexia y construcción geométrica), así como nuestra insistencia durante estos tres meses en trazar segmentos perpendiculares (para encontrar alturas de triángulos y mediatrices) y en posicionar polígonos en distintas posiciones han ido encaminadas hacia este propósito de mejorar los niveles básicos de percepción. Por el contrario, no se han llevado a cabo muchas actividades dirigidas a la mejora del nivel operativo de percepción ni del proceso de justificación. Ello se debe en gran parte a la falta de tiempo, pues la experiencia de aula sólo tuvo una duración de una sesión, y la secuenciación de la unidad didáctica no dejaba mucho tiempo para actividades adicionales. Pero sería muy interesante poder disponer de más tiempo para programar alguna experiencia de aula adicional posterior, centrada en estos procesos o fases posteriores, una vez asimiladas las etapas básicas de percepción que sí parece hemos logrado con nuestros alumnos.

No podemos discernir cómo ha influido cada una de las acciones llevadas a cabo sobre esta mejora global, pero lo que está claro es que cada una de ellas, por pequeña que parezca, ha tenido su peso o relevancia. Y seguro que cada acción ha tenido efectos diferentes sobre cada uno de nuestros alumnos, de ahí que sea interesante llevar a cabo acciones variadas y diversas.

Está claro que la experiencia de aula debería ser la acción que se llevara la mayor parte del “éxito”, puesto que se trata de una sesión de una hora de duración, y que incluye 4 actividades variadas y con distintos fines específicos, aunque una misma finalidad. Esta experiencia de aula fue muy pensada de antemano, tomando como referencia las actividades planteadas en la prueba inicial y final, basadas éstas a su vez en las dificultades concretas y reales que encuentran nuestros alumnos en el aprendizaje de la geometría.

Pero estoy convencida que las múltiples pequeñas acciones llevadas a cabo en el momento oportuno durante la impartición de la UD también han contribuido en la mejora de los resultados, tanto a nivel de las construcciones geométricas llevadas a cabo de forma conjunta con nuestros alumnos (por ejemplo al enseñarles a construir una mediatriz o una bisectriz con compás y regla, al estudiar los puntos notables de un triángulo), como a nivel de breves y concisas justificaciones (por ejemplo la demostración de que la suma de ángulos interiores de un triángulo es de 180° , al estudiar sus propiedades). No se trata en absoluto de ir haciendo demostraciones o construcciones geométricas, una detrás de otra, sino de hacerlo en el momento preciso, cuando se pueda relacionar con la teoría impartida.

Lo mismo sucede con las dos actividades de geoplano llevadas a cabo, sobre todo con la segunda de ellas, que se ha realizado dentro del tema de polígonos y áreas, y de forma

paralela: conforme íbamos deduciendo conjuntamente el área de un polígono, íbamos viendo el desarrollo de esa figura en el geoplano y la fórmula de cálculo de su área.

También tenemos que comentar que las actividades de geoplano y las realizadas sobre el hexágono han sido muy útiles para el tema central de nuestra unidad didáctica (áreas de figuras planas), pero quizás la evolución de los resultados obtenidos en ambas pruebas no lo pone de manifiesto. Creemos que estos dos temas deberían haber llevado a unos mejores resultados en las preguntas 5 (apartado comecocos), 6 y 7, pero no ha sido así, en parte quizás por falta de interés de los alumnos en su resolución, en parte por sus dificultades en aprender la geometría. En todo caso, es un punto de mejora, como veremos a continuación en el apartado de crítica constructiva.

En todo caso, a nivel global podemos afirmar que el conjunto de las actividades llevadas a cabo durante la impartición de la UD han contribuido a mejorar los resultados de la prueba. Y, por tanto, que hemos conseguido nuestro objetivo primordial de cuantificar dificultades que nuestros alumnos encuentran en el aprendizaje de la geometría, e incidir sobre éstas, minimizando sobretodo los procesos de visualización, aunque también en los de justificación (más a nivel cualitativo).

Con nuestra investigación (diseño de la prueba inicial y final, de los indicadores para cuantificar estas dificultades y de las acciones experimentadas en el aula con nuestros alumnos), hemos demostrado que se cumplen nuestras hipótesis de partida (enunciadas en el apartado 4.3) de este trabajo):

- **los procesos de visualización y deducción requieren superar ciertas dificultades** (hipótesis 1 y 2), anunciadas en nuestro documento base de trabajo),
- **podemos educar la percepción geométrica de nuestros alumnos** (hipótesis 3), dotándoles de técnicas y habilidades de percepción visual por un lado, y fomentando por otro lado el desarrollo entre ambos procesos mediante actividades manipulativas derivadas de construcciones geométricas. Esta tercera hipótesis es nuestro objetivo principal, y la hemos extraído del libro “Invitación a la didáctica de la geometría” (véase [12]), en el cuál se confirma que la percepción visual (al igual que el lenguaje) puede ser aprendida y que ésta es fundamental para alcanzar una adecuada percepción espacial. Se trata de que los alumnos desarrollen una serie de habilidades y técnicas de percepción visual de forma simultánea al estudio de la Geometría.

Crítica constructiva (aspectos de mejora).

Como crítica constructiva personal, hubiera tenido que aprovechar la actividad 1 de la experiencia de aula (papiroflexia) para plantear la actividad 6 (áreas sombreadas iguales en un rectángulo dado) y solucionarlo mediante la manipulación. Además hubiera ido más en línea con la actividad 2 de la experiencia de aula (demostración del teorema de Pitágoras). De esta forma creo que los resultados habrían mejorado en la prueba final para las preguntas 6 y 7.

En cuanto a la figura del hexágono regular, hubiera sido interesante haber incluido en las pruebas inicial y final alguna pregunta de justificación (por ejemplo: razones por las que se descompone en seis triángulos equiláteros), aprovechando que hemos trabajado mucho esta figura durante la impartición de la UD (ángulos interiores y centrales) y durante la experiencia de aula (construcción geométrica y manipulación mediante papiroflexia). Estoy convencida que nuestros alumnos hubieran obtenido muy buenos resultados en la prueba final versus la inicial, con una gran mejora en lo que a procesos de justificación se refiere. De esta forma podríamos corroborar con mayor énfasis que efectivamente podemos incidir en los procesos de visualización y justificación de nuestros alumnos, lo que equivale a afirmar que **la percepción geométrica se EDUCA.**

En cuanto a otros posibles aspectos de mejora de la experiencia de aula, creo que hemos ido muy justos de tiempo y que podríamos haber hecho dos o tres sesiones en lugar de una, pero el tiempo era un factor clave como hemos visto antes (sobre todo considerando que solemos ir a la par con el otro grupo de la optativa).

Y finalmente, con el fin de obtener una mayor atención y concentración por parte de nuestros alumnos, sobre todo en momentos de realizar demostraciones, quizás sería conveniente en el futuro que una pequeña parte de la nota se pudiera otorgar a la prueba final llevada a cabo (de hecho así lo comenté con mi tutora el mismo día que pasamos la prueba final, pero ya era tarde; además, quizás hubiera supuesto un problema comparativo por establecer otros criterios de evaluación a los alumnos del otro grupo, y a los que cursaron la materia durante el primer cuatrimestre).

Valoración por parte de los alumnos.

Para concluir, comentar que no sólo los resultados hablan por sí solos, sino también nuestros alumnos. Como habíamos comentado, el mismo día que nuestros alumnos realizaron la prueba final, les pasé una breve encuesta (ver **anexo 7**) en la que les pedía por un lado que evaluaran la impartición de la UD por mi parte (para mi análisis personal: puntos fuertes, puntos débiles y sobre todo aspectos de mejora), y por otro lado que **evaluaran las acciones extraordinarias llevadas a cabo** (básicamente las pruebas inicial y final, y la experiencia de aula). En relación a estas acciones les pedía respuestas en un doble sentido:

- **grado de satisfacción** por su parte: esto nos permite ver si hemos logrado motivar a nuestros alumnos, y si han disfrutado con las actividades propuestas. La gran mayoría han vivido con ilusión y entusiasmo las acciones extraordinarias llevadas a cabo (sobre todo la experiencia de aula, y más en concreto, la actividad de papiroflexia), valorándolo como algo distinto (romper con la rutina), dinámico, visual, divertido, lúdico, entretenido, curioso, novedoso y práctico. Los alumnos coinciden en que les ha servido mucho para aclarar dudas y repasar la materia de cara a la prueba sobre áreas de polígonos. Y prácticamente todos ellos repetirían acciones similares más a menudo, por los motivos que acabamos de exponer. Perciben estas acciones como una forma fácil y divertida de aprender.

- aprendizaje y utilidad de futuro: nuestro objetivo es analizar si estas acciones han servido para reforzar contenidos de la unidad didáctica, superar posibles dificultades en el aprendizaje de la geometría, y si creen que les servirá como base para la geometría de los siguientes cursos, para su formación posterior y para su vida cotidiana. Todos los alumnos sin excepción han valorado muy positivamente la acción, confirmando que estas actividades les han ayudado a reforzar los contenidos vistos en clase y que éstas les han ayudado a superar posibles dificultades en el aprendizaje de la geometría, en mayor o menor medida (uno de ellos comenta “he entendido las fórmulas en lugar de aprenderlas únicamente de memoria”). Sin embargo, no todos están de acuerdo en la utilidad futura de estas acciones: casi todos coinciden en qué si les han servido como base para cursos siguientes, pero hay varios alumnos que comentan que sólo les servirá para su formación posterior si estudian carreras universitarias de ciencias tipo arquitectura. Por último, comentar que sólo unos pocos ven la utilidad de la geometría en su vida cotidiana, como cabía esperar. Lo que sí parece haber quedado claro a grandes rasgos es que nuestros alumnos han adquirido una **base más sólida para aprendizajes futuros** y de nivel superior de la geometría, aunque queda patente que estamos en un primer nivel muy incipiente (los alumnos partían prácticamente de cero).

5) CONCLUSIONES GENERALES Y RECOMENDACIONES.

Antes de comenzar con las conclusiones, sería conveniente comentar que hay otros muchos factores que pueden incidir en el aprendizaje de cualquier materia en general. Aunque el propósito de este trabajo es adentrarnos en las dificultades que encuentran los alumnos en el aprendizaje de la materia en sí para poder incidir en éstas, veamos brevemente que factores juegan en contra del aprendizaje.

Uno de estos factores serían las deficiencias del sistema educativo español en general, en comparación con la OCDE. A pesar que la ratio de alumnos por profesor es más baja y que los alumnos españoles tienen más horas de clase anuales (1.050 horas frente a 907 horas), dedican menos horas a las matemáticas (130 por 145). Además, la autonomía de los centros en la gestión de recursos en combinación con los mecanismos de rendición de cuentas aumenta el rendimiento educativo, y en España la autonomía de centros es mucho más baja por un lado, y el porcentaje de alumnos que asisten a centros que hacen públicos sus resultados es inferior, por otro lado. Además, la presencia de evaluaciones externas y estandarizadas en España es menor que en la OCDE. Por último, destacar que el absentismo escolar no justificado en España es elevado, y que ello contribuye al rendimiento escolar de todos los alumnos; además, ha ido en aumento en 2012 en relación a 2003 (**véase [1]**).

Más allá de estas cuestiones, podríamos añadir cuestiones organizativas de centro que en ocasiones frenan el ritmo de aprendizaje, como son los días en que no hay clase (aparte de las vacaciones y días de libre disposición, tenemos las salidas culturales o excursiones, y los días en que no hay clase por las mañanas porque se hacen exámenes trimestrales), o la no substitución de bajas de profesores hasta no llevan 15 días de baja. También habría que mencionar el tiempo que se pierde entre clase y clase, que en muchos casos acaba implicando que la clase empieza con 10 minutos de retraso (sobre clases de una hora de duración), y analizar hasta qué punto afecta el horario de impartición de la materia (días seguidos versus alternos, y si en horario de mañana o de tarde). Finalmente en este apartado tendríamos que analizar si la geometría se imparte como materia independiente (como el caso que nos ocupa) o en qué momento se imparte (a principios o a finales de curso), así como hasta qué punto el centro se involucra en proyectos interdisciplinarios o transversales, así como en proyectos de profundización de áreas como sería el caso del impulso a la lectura o la resolución de problemas.

También creo importante citar que en muchas ocasiones no da tiempo a impartir todos los contenidos programados, y si bien hay que tener cierto grado de flexibilidad al respecto, también deberíamos ser más rigurosos con las temporizaciones de las materias de forma que se cumplan en la medida de lo posible. No deberíamos dejar siempre las mismas áreas de las matemáticas (como la geometría o la estadística) relegadas a un segundo plano, ni siempre para finales de curso. Al fin y al cabo, el principal perjudicado siempre acaba siendo el propio alumno.

También recordemos en este apartado las dificultades que pueden encontrar nuestros alumnos en las pruebas a las que se ven sometidos, especialmente en las pruebas

diagnósticas de 3º de la ESO que hemos analizado en el punto 3 (ver conclusiones en el punto 3.4). En este sentido, creemos que habría que dedicar una mayor proporción a la geometría, y ser más cuidadosos y rigurosos en la elaboración de dichas pruebas, tanto en la redacción de enunciados (aunque parece ser se trata más bien de un problema de comprensión por parte de los alumnos), como en la precisión de los dibujos.

5.1) Orientaciones para la impartición de la geometría en el aula.

Como hemos comentado en el punto 4.8), es la suma de todas las acciones del día a día lo que nos puede llevar a conseguir que nuestros alumnos minimicen las dificultades que se encuentran en el aprendizaje de la geometría. Por tanto, no sólo debemos limitarnos a acciones puntuales de sesiones concretas (experiencias de aula), sino tratar que estas acciones puntuales estén presentes en el día a día de la impartición de la geometría.

En mi opinión se trata más bien de un tema de actitud por parte del profesorado, de forma que haya una actitud de búsqueda activa de oportunidades para implantar pequeñas actividades, demostraciones o cualquier otra acción que implique estimular los procesos de visualización y de justificación de nuestros alumnos. En vista de los contenidos que debemos impartir, y del curso en que nos encontremos, debemos buscar cómo motivar a nuestros alumnos mediante actividades lo más ricas posibles a nivel de competencias. Y estas actividades deberían ir en paralelo con la materia impartida. Cualquier ocasión es buena para añadir una pequeña demostración, una construcción geométrica o una acción que estimule la visualización.

A nivel de recomendaciones, también deberíamos intentar introducir experiencias de aula más a menudo, pues son valoradas muy positivamente por nuestros alumnos y permiten acercarlos a las matemáticas, a través de situaciones de la vida cotidiana. Se trata de proponer a nuestros alumnos problemas de geometría sobre situaciones de la vida cotidiana como podría ser cercar un terreno, embaldosar una cocina o envolver un regalo optimizando el papel. De ahí que en las pruebas diagnósticas o de evaluación que la Generalitat lleva a cabo, así como en las pruebas PISA, se planteen cada vez más problemas reales del día a día.

Y trabajar en estrecha relación con otras materias, por ejemplo con educación visual y plástica en lo que a construcción geométrica se refiere (ha quedado demostrado que a través de ésta estrechamos el nexo entre los procesos de visualización y de justificación).

Otras recomendaciones serían hacer uso de los libros digitales (thatquiz y similares), del material de refuerzo, de las webs de recursos visuales para geometría (el ministerio de Educación ofrece recursos para enseñar las mates de forma interactiva, con su proyecto Descartes) o de las TIC dinámicas como geogebra o cabri que integran geometría y álgebra (mejor para cursos posteriores de la ESO, o incluso Bachillerato).

Por otra parte, sería muy enriquecedor el llevar a cabo aproximaciones históricas relacionadas con los contenidos, como por ejemplo la geometría en las antiguas civilizaciones (Egipto y Babilonia) o el Teorema de Pitágoras (Babilonia, China y Grecia). Así lo hemos visto en la Asignatura de Matemáticas del S. XXI, en la parte de Historia.

Si con pequeñas acciones durante la impartición de la UD de geometría (25 sesiones en total, una de ellas la experiencia de aula) hemos conseguido mejorar considerablemente los resultados de nuestros alumnos en una sencilla prueba, imaginen cuánto podemos hacer si tenemos la oportunidad de enseñar geometría a nuestros alumnos durante varios curso de la ESO y/o varios años. Tenemos un largo camino por recorrer en este aspecto, pues una mejor formación base en esta área de la geometría (visualización y justificación informal) podrían contribuir significativamente a un desarrollo del conocimiento matemático futuro de nuestros alumnos en general. El desarrollo del pensamiento matemático requiere la puesta en marcha de experiencias de aula que favorezcan la aparición de conceptos y procesos mediante los cuales se generen en nuestros alumnos las competencias necesarias para obtener mejores aprendizajes y, con ellos, mejores desempeños (**véase [7]**).

Hemos concluido nuestra investigación con estas recomendaciones a tener en cuenta en trabajo dentro del aula, que permitan incidir en las dificultades que encuentran nuestros alumnos en el aprendizaje de la geometría. De esta forma, logramos que nuestros alumnos dispongan de más armas para afrontarlas por un lado, y de una base geométrica más sólida para afrontar futuros retos geométricos por otro lado (no sólo durante su etapa académica, sino también a lo largo de toda su vida, en cualquier situación de la vida cotidiana). De forma simultánea, aunque no prioritaria, deberíamos conseguir una mejora en los resultados de geometría de las pruebas externas a las que se enfrentan nuestros alumnos a lo largo de su vida escolar.

5.2) Conclusiones generales.

Como tema central de este trabajo hemos cuantificado las dificultades de aprendizaje de nuestros alumnos en la geometría, basándonos en un documento que analiza los procesos de aprendizaje de la geometría (**véase [4]**), y centrándonos en los procesos iniciales de visualización y deducción, que son los que competen a nuestros alumnos de 2º de la ESO. Incluso hemos ido más allá de estas dificultades, analizando otros aspectos como la precisión matemática, o la simetría.

Mediante unos indicadores diseñados por nosotros para cuantificar estas dificultades a través de la comparativa resultados de las prueba inicial y final por parte de nuestros alumnos (prueba diseñada por nosotros en paralelo con los indicadores), hemos detectado y cuantificado en qué fase de estos procesos se encallan nuestros alumnos, con el propósito final de poder incidir en estas dificultades, minimizándolas.

Con tal fin, hemos diseñado una experiencia de aula de una hora de duración (basada en la prueba inicial y final, y en un artículo de una experiencia de aula real (**véase [7]**), que hemos experimentado con nuestros alumnos antes de la prueba final, para demostrar que efectivamente la percepción geométrica se aprende.

Trabajando en el día a día en el aula con este tipo de actividades, podemos conseguir que nuestros alumnos mejoren en sus procesos de visualización y deducción, base para sus futuros aprendizajes geométricos (entre ellos la modelización geométrica).

Este es nuestro principal objetivo, aunque de que de paso implique también obtener

mejores resultados en las pruebas de geometría a las que se enfrentan. Según comenta Maria Antonia Canals en una de las series de “Cuando la edad es un plus” de La Vanguardia que se inició en diciembre 2012 (**véase [13]**), el error está en orientar la enseñanza de las matemáticas a los buenos resultados en el informe PISA; esta innovadora didáctica de más de 80 años que dirige un centro de investigación en la universidad, critica además que el currículo se modifique cada dos por tres (algo que comparto plenamente), y que los alumnos rurales tengan el mismo que los de ciudad (es lógico, aunque veo difícil cómo hacer la distinción, considerando además que no sabemos qué estudios posteriores tendrán unos y otros).

Decíamos en el punto 2.1) que en la última década no hemos sido capaces de dar la vuelta a los malos resultados que nuestros alumnos obtienen en el área de matemáticas de las pruebas PISA (2003 versus 2012, años en que se han centrado en este área), puesto que no se han producido cambios significativos en dichos resultados, pero confiamos en poder hacerlo la próxima década. En nuestras manos queda el reto de mejorar dichos resultados y escalar posiciones a nivel mundial. No se trata de ser los mejores a nivel mundial a corto plazo, pero sí de mejorar nuestros resultados pasito a pasito, de forma que en una década podamos hablar de cambios significativos (o como mínimo, reducir las actuales distancias con el promedio de los países de la OCDE).

Para concluir, comentar que el papel del docente de hoy en día debería ser más el de mediador del aprendizaje y generador de conflictos cognitivos para estimular la motivación y participación de nuestros alumnos. Tenemos que cruzar la línea de la enseñanza tradicional para desplegar nuestra capacidad como profesionales de la educación (y no sólo como meros transmisores de conocimientos). Se trata de lograr la **“proficiencia” en la enseñanza**, término novedoso que debería ser entendido como los conocimientos y competencias que deberíamos tener todos los profesores para que nuestra enseñanza se considere de calidad. Como decían Z. Steven, D. Harvey y H. Arthur en su libro de 1998 “Best Practice: New Standards for Teaching and Learning in America’s Schools”: “los conceptos de geometría y medición se aprenden mejor mediante experiencias que involucren la experimentación y el descubrimiento de las relaciones con materiales concretos”.

6) BIBLIOGRAFÍA Y WEBGRAFÍA.

[1] Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Prensa. Resultados de España en PISA 2012. <http://www.mecd.gob.es/prensa-mecd/actualidad/2013/12/20131203-pisa.html>

[2] Generalitat de Catalunya. Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu (CSASE). <http://www20.gencat.cat/portal/site/ensenyament/menuitem.2a476b330bb21681c65d3082b0c0e1a0/?vgnnextoid=968d5d78d699f310VgnVCM2000009b0c1e0aRCRD>

[3] Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament. "Creamat". Juny 2012. Orientacions per la millora del aprenentatge de la geometria.

[4] Ministerio de Educación Nacional de la República de Colombia. Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales (2004), dentro del Proyecto Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia. ISBN: 958-97413-4-7.

[5] Generalitat de Catalunya. Document elaborat per un grup de treball coordinat per la Dra. Carme Burgués i el Sr. Jaume Sarramona. Gener de 2013. "Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic". Identificació i desplegament a l'educació secundària obligatòria.

[6] Generalitat de Catalunya. Departament d'Educació. Decret 143/2007.

[7] Barboza Rodríguez, Juan Alberto. "Explorar y Descubrir para Conceptualizar en Geometría". Scientia et Technica Año XVIII, Vol. 18, Nº 2. Agosto de 2013. Universidad Tecnológica de Pereira. ISSN 0122-1701.

[8] National Council of Teachers of Mathematics. Resources for Teaching Maths. <http://www.illuminations.nctm.org>

[9] Generalitat de Catalunya. Departament d'Educació. Aubanell Anton. Llicència durant el curs 2005-2006, titulada "Recursos materials i activitats experimentals en l'educació matemàtica a secundària".

[10] Generalitat de Catalunya. Xarxa Telemàtica Educativa de Catalunya (TXEC). "Creamat". Preguntes que poden servir d'indicadors de nivell de riquesa competencial d'una activitat. <http://www.phobos.xtec.cat/creamat>

[11] Generalitat de Catalunya. Direcció General de l'Educació Bàsica i el Batxillerat. "Del currículum a les programacions". Una oportunitat per a la reflexió pedagògica a l'educació bàsica (març de 2009)". <http://www.xtec.cat/edubib>

[12] Alzina Claudi, Burgués Carme i Fortuny Josep M^a: "Invitación a la didáctica de la geometría". Editorial SINTESIS, S.A. ISBN: 84-7738-020-1.

[13] La Vanguardia. Vida. Cuando la edad es un plus (57). <http://www.lavanguardia.com/vida/20131223/54398512672/maria-antonia-canals-83-anos-alentar-maestros.html>