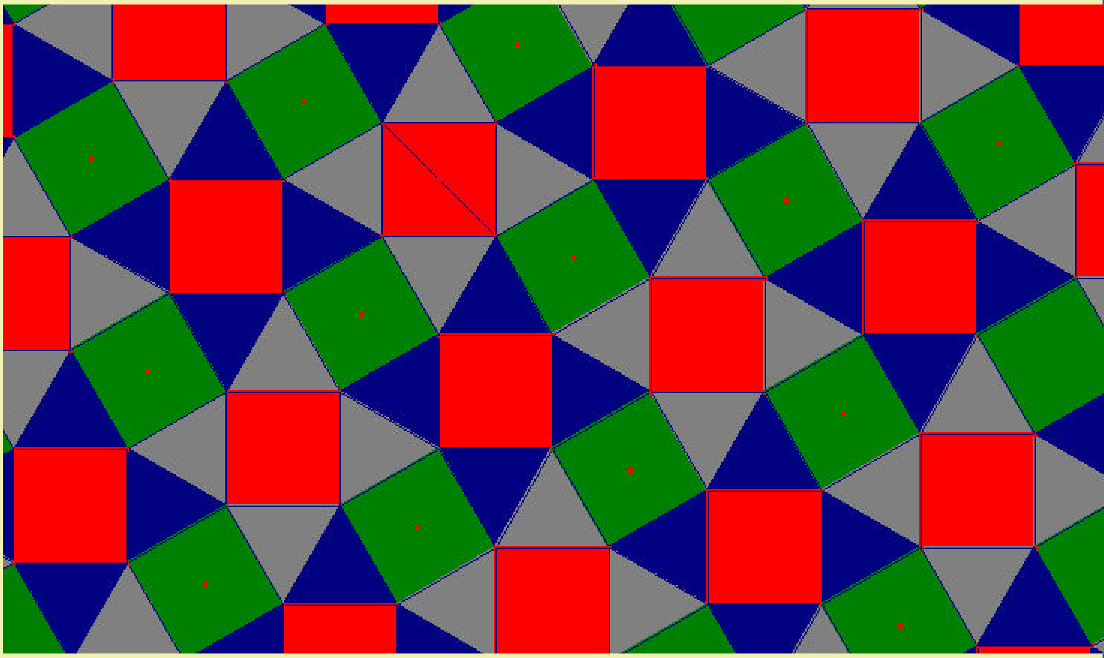
LA GEOMETRIA A SECUNDÀRIA

DAMIÀ SABATÉ



UPC

PRESENTACIÓ

Tot i que el títol pugui indicar-ho o suggerir-ho, no he pretès, ni de bon tros, fer una anàlisi exhaustiva de l'ensenyament de la geometria a secundària, sinó que he tractat d'oferir idees per a la reflexió i exemples per al treball a l'aula.

M'he centrat sobretot en els aspectes de l'ensenyament de la geometria a l'ESO, pel fet que és on més mancances pot tenir el professorat que va cursar estudis secundaris de BUP i COU, que no ha tingut una formació geomètrica clàssica que els més veterans, procedents de plans antics, sí que hem tingut. En canvi, només entraré d'esquitllentes en els aspectes didàctics de l'ensenyament de la geometria analítica i de la trigonometria plana. En aquests dos casos, es tracta de temes molt treballats per una gran majoria del professorat, com a alumnes i com a professors, i, per això mateix, és on hi ha menys mancances.

Tots els qui portem uns quants anys fent de professors sabem fins on ha pogut arribar l'empobriment dels coneixements, dels mètodes i de la imaginació geomètrica en moltes generacions d'alumnes. Quantes vegades no ens hem trobat amb estudiants que estan acabant els seus estudis de secundària i que, tot i tenir una clara vocació científica o tècnica, no han sabut "veure", ni imaginar, ni fer un croquis d'un simple tetràedre? O d'un con inscrit en una esfera? O no han sabut traçar les altures en un triangle obtusangle?

Aquest llast en la formació de molts estudiants de secundària és el que m'ha portat a triar la geometria per a aquesta publicació. Lamentablement s'havia convertit en el parent pobre de les matemàtiques. És clar, doncs, que hi ha força camí a recórrer i força feina a fer, només espero contribuir-hi modestament.

El llibre consta de sis capítols, de tres annexos i d'un apèndix. En el primer capítol es fa una breu anàlisi de la situació actual de la geometria a secundària. En el segon, es revisen alguns aspectes del marc teòric del seu ensenyament. Els capítols tres, quatre i cinc tracten, respectivament, de la geometria plana, de la geometria de l'espai i d'àrees i volums. En el capítol sis, s'agrupen quatre temes diferents de forma més breu: els moviments en el pla, la trigonometria, les relacions entre la geometria i l'àlgebra i la història de la geometria. En els annexos, s'hi pot trobar una introducció al programa Cabri-Géomètre, les solucions comentades dels problemes i exercicis proposats i un resum, amb il·lustracions, del problema de les pavimentacions poligonals del pla. L'apèndix, a càrrec d'Antoni Cuenca, tracta de la geometria dels formats del paper i d'algunes construccions a base de doblecs.

Tots els capítols inclouen exercicis que el lector pot desenvolupar per tenir una visió més aprofundida de les propostes fetes i alguns problemes de geometria clàssica les resolucions dels quals es poden trobar a l'annex 2; els capítols tres, quatre, cinc i sis inclouen també exemples concrets per al treball a l'aula, experimentats personalment, amb comentaris per a la seva aplicació.

Cal afegir que els continguts del llibre han servit de base per a cursos de formació del professorat impartits a l'Institut de Ciències de l'Educació de la Universitat Politècnica de Catalunya.

Finalment, vull deixar constància del meu agraïment a la Montserrat Ferret, que ha tingut la paciència de corregir i revisar tot el text, a l'Antoni Cuenca que ha fet un exel·lent apèndix i especialment a l'Ester Casellas -incansable, eficaç i sempre disposada a escoltar idees i a suggerir-ne de noves-, que ha estat la persona que de més a prop ha seguit la feina que he fet.

1. PUNT DE PARTIDA: BREU ANÀLISI DE LA SITUACIÓ ACTUAL

En aquest capítol es fa una ullada ràpida a la situació de l'ensenyament de la geometria en els últims anys.

1.1. L'EXPERIÈNCIA PERSONAL

Tots els experts coincideixen a dir que els docents, conscientment o no, tenen la inevitable tendència a reproduir el sistema sota el qual han après. Cal parar atenció, doncs, ni que sigui breument, a allò que s'ha rebut com a alumne. Si es volen fer canvis caldrà ser conscient d'aquesta "herència" i a això respon aquesta secció.

Us convido, doncs, a fer una breu introspecció i a retornar a les aules on vau estudiar tants i tants anys, de primària a secundària i a la universitat. Quina geometria us van ensenyar? Com us la van ensenyar? A partir de l'experiència? De forma deductiva o inductiva? Els vostres professors la consideraven important? I vosaltres, us hi sentíeu motivats? Què heu hagut d'aprendre pel vostre compte? Quins instruments i materials auxiliars fèieu servir per treballar la geometria? Com us sentíeu amb la geometria? I els vostres companys, què en pensaven?

Per part meva, recordo la geometria a primària amb força delit. També recordo la geometria del batxillerat, molt a la vora dels *Elements* d'Euclides, com un plat una mica més aspre. Aquella geometria no era gaire popular entre els estudiants, no me'n considero una mostra significativa, ja que, finalment, vaig acabar estudiant exactes. A secundària, els meus professors em van ensenyar una geometria de caire deductiu, molt rígida, excel·lent com a escola del rigor, però més aviat desencisadora i molt allunyada de la imaginació i de la màgia que també són imprescindibles en matemàtiques.

1.2. ELS DOCENTS ACTUALS

Aquesta no serà, sens dubte, l'experiència de molts docents més joves. Durant més de vint anys, la geometria va tenir un paper absolutament marginal a secundària. La geometria d'Euclides, en ser considerada com una branca morta i acabada de les matemàtiques, va desaparèixer dels plans d'estudi, es podria dir que va ser devorada per l'àlgebra.

Malauradament, molts mestres de primària van ser també "víctimes" d'aquest procés i l'únic reducte en els antics plans d'estudi on encara hi havia geometria de la "de sempre", tampoc no va poder superar l'onada descomunal de l'àlgebra. A més, el fenomen es nodria a si mateix, ja que molts docents, en sentir-se incòmodes amb els capítols de geometria que no dominaven, els anaven deixant de banda o bé per al final de curs. I això ja sabem tots com acaba: poca geometria i feta a corre-cuita.

Ara mateix, es presenten dos problemes fonamentals pel que fa a la formació del professorat de matemàtiques: d'una banda, hi ha molts docents de primària i de secundària que, com ja s'ha dit, han estat víctimes d'aquests vint anys sense geometria i que, en conseqüència, poden tenir algunes mancances de formació; d'altra banda, la preponderància dels mètodes deductius sobre els inductius en l'ensenyament de les matemàtiques -en aquest cas no des de fa vint anys, sinó des de sempre- fa que la geometria experimental o científica no estigui reconeguda o que no es conegui prou bé.

De tota manera, també val a dir que la situació és força heterogènia. Encara som molts els qui vam estudiar amb Euclides o els qui, personalment, s'han sentit atrets per la geometria sintètica i que, al marge dels plans d'estudi oficials, hi han dedicat molt de temps d'ensenyament i d'estudi.

1.3. L'ALUMNAT

I els alumnes, què esperen del professorat? Quina és la seva imatge preconcebuda de les matemàtiques i del professorat de matemàtiques? Quina geometria estan esperant?

Si es para atenció a la imatge de les matemàtiques en els mitjans de comunicació, es pot veure que a la societat actual hi ha una accentuada tendència a confondre les matemàtiques amb l'aritmètica i l'àlgebra. Així, si un professor va a classe i comença a practicar amb els alumnes segons quines activitats de geometria experimental corre el risc que li diguin: "ah! avui no fem *mates*?"; o "ah! quina sort, avui toca jugar!, o també, "*profe*, en això del dibuix no hi tinc tanta facilitat com amb les *mates*."

El cert és, però, que ara els alumnes accedeixen a secundària de ben jovenets i malgrat les idees que puguin dominar la societat, se'ls podrà convèncer amb relativa facilitat que la geometria forma part intrínseca i essencial de les matemàtiques i que n'ha estat i encara n'és un dels seus principals motors.

1.4. ALGUNS EXEMPLES I ALGUNS RESULTATS DE PROVES EXTERNES

El coneixement de les competències geomètriques assolides per l'alumnat de secundària des d'una perspectiva general és molt important per als professionals de l'ensenyament. Aquest coneixement podrà ajudar a decidir quines actuacions són prioritàries en la formació de l'alumnat.

Cal tenir certa cautela, però, quan es comparen resultats de proves molt diverses i també quan es comparen els resultats d'una mateixa prova a països diferents. Efectivament, en els processos educatius hi intervenen moltes variables i, a més, les proves només mesuren alguns dels aspectes de l'assoliment de l'aprenentatge.

A continuació, es presenten els resultats d'algunes proves d'avaluació externa amb exemples dels exercicis i dels problemes de geometria plantejats als alumnes.

1.4.1. Prova de la Inspecció del 1995

Un indicador referent a les competències geomètriques de l'alumnat de Catalunya el podem trobar a la prova que la Inspecció d'Ensenyament va dur a terme l'any 1995 amb alumnat de 16 anys (hi van participar 1433 alumnes d'ESO, de BUP i d'FP de centres públics i privats). A l'informe de la Inspecció, que no es va fer públic fins l'any 1998, es feien les observacions inicials següents:

> 1. Els continguts a què fa referència la prova corresponen al currículum de l'educació secundària obligatòria.
>
> 2. Versa sobre els coneixements bàsics i instrumentals que són útils en si mateixos i no només per a continuar l'aprenentatge de les matemàtiques [...]

3. Es basa més en habilitats generals matemàtiques que no pas en continguts molt particulars.

4. Conté algunes qüestions obertes que permeten l'explicació dels alumnes.

Es pot pensar, doncs, que la prova es relaciona amb les competències bàsiques matemàtiques de l'alumnat de secundària de 16 anys. Tanmateix, amb la perspectiva actual, sembla clar que anava una mica més enllà de les competències bàsiques tot i els propòsits inicials. Aquestes eren les parts de la prova referents a geometria i mesura:

B) GEOMETRIA

5. En el plànol d'un solar rectangular observeu que la llargada i l'amplada són de 60 cm i 50 cm respectivament. No han posat l'escala d'aquest plànol. La superfície real del solar mesura 120 m^2.

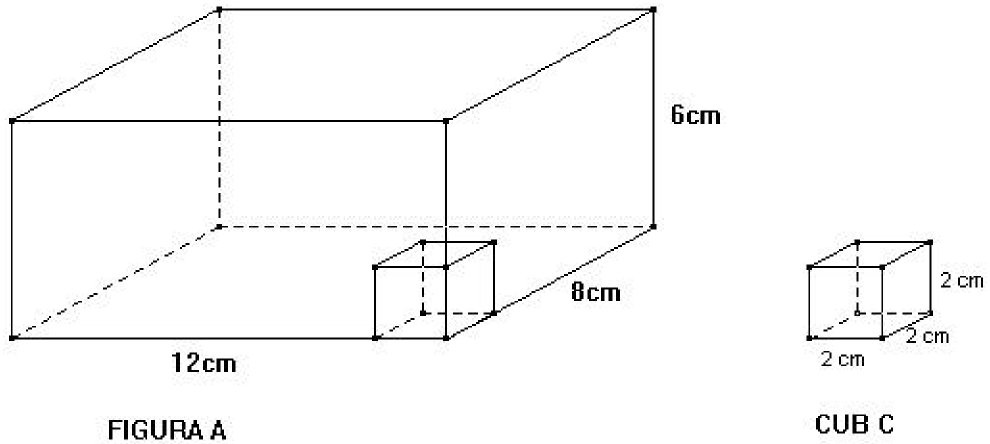
a) Calculeu la superfície del rectangle en el plànol.

b) Calculeu la relació entre la superfície real i la superfície en el plànol.

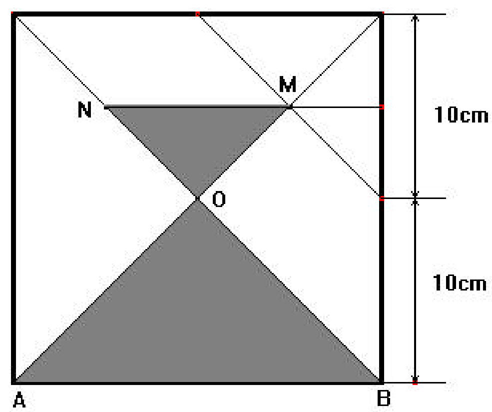
c) Quina és l'escala del plànol?

Indiqueu, sempre que calgui, les unitats emprades.

6. a) Quants cubs *C* caben a la figura *A*? b) Calculeu el volum de *C*; c) Calculeu el volum de la figura *A*.

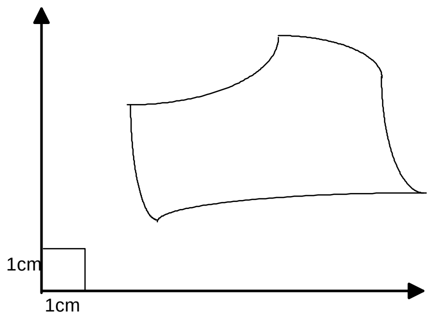


7. a) Calculeu les longituds *AO* i *OM* a la figura següent. b) Si trobéssim l'àrea del triangle petit *OMN*, per quin nombre l'hauríem de multiplicar per tal de conèixer la de l'*OAB*? Raoneu la resposta.



C) <u>MESURA</u>

8. Calculeu, aproximadament, l'àrea de la figura següent si el costat del quadrat de referència mesura 1 cm.



9. Feu una estimació de les mesures següents:

a) La superfície d'una pista de bàsquet.
b) L'altura d'una casa amb entresol, tres pisos i un àtic.
c) El diàmetre d'una pilota de futbol.

Aquests són alguns dels resultats que es recollien a l'informe:

1. Puntuacions globals dels alumnes

Puntuació sobre 10	**Percentatge d'alumnes**
0-2	37,9%
2-4	41,6%
4-6	15,3%
6-8	5,1%
8-10	0,1%

Aprovats i suspesos	
Menys de 5	88,8%
5 o més	11,2%

2. Mitjanes per blocs

Blocs temàtics	**Mitjanes sobre 10**
Gràfics	3,59
Raonament	3,18
Càlcul	2,85
Mesura	2,61
Geometria	2,42
Probabilitat	1,63

3. Qualificacions mitjanes per exercicis amb distinció de l'alumnat de BUP (només es recullen les dades que corresponen als cinc exercicis presentats en aquesta secció):

Núm. de l'exercici	5	6	7	8	9
MITJANES SOBRE 10 A 2n BUP	1,87	3,61	2,08	3,45	1,99
MITJANES GLOBALS SOBRE 10	1,83	3,58	1,86	3,10	2,12

Certament, els resultats s'han de considerar indicatius de les grans mancances en la formació geomètrica de l'alumnat. S'ha de constatar també que no s'observaven diferències significatives en funció de la procedència de l'alumnat: tant els que procedien de 4t d'ESO, com els de BUP, com els d'FP ho feien força malament.

1.4.2. Proves de l'INCE del 1995

L'any 1995, l'INCE (Instituto Nacional de Calidad y Evaluación, organisme que depèn del Ministerio de Educación y Ciencia) va dur a terme un estudi general sobre el sistema educatiu no universitari. Hi van participar el MEC i les comunitats autònomes de Catalunya, Galícia, Navarra, País Basc, València i Canàries. L'estudi incloïa un seguit de proves per avaluar el rendiment educatiu en diverses àrees. Concretament, es van passar proves de comprensió lectora, de gramàtica i literatura i de matemàtiques a 20.642 alumnes de 14 anys de 8è d'EGB i de 2n d'ESO i a 25.893 alumnes de 2n de BUP, de 2n d'FP1 i de 4t d'ESO (la implantació de la reforma educativa estava a mig fer i era diversa a l'Estat espanyol).

Les proves de matemàtiques per a alumnes de 14 i de 16 anys constaven de 45 preguntes de tipus test relacionades amb diversos aspectes del currículum de l'àrea. Cadascuna de les preguntes es va classificar des de dues dimensions: continguts i operacions cognitives. Els blocs de continguts considerats i els percentatges de preguntes de cada bloc eren els següents:

Blocs de continguts	**Percentatge de preguntes als 14 anys**	**Percentatge de preguntes als 16 anys**
Nombres i operacions	35%	25%
Mesura	20%	15%
Geometria	20%	20%
Estadística i probabilitat	15%	25%
Àlgebra i funcions	10%	15%

Pel que fa a les operacions cognitives es tenia:

Operació cognitiva	**Percentatge de preguntes als 14 anys**	**Percentatge de preguntes als 16 anys**
Conèixer	15%	15%
Emprar algorismes i habilitats bàsiques	30%	20%
Emprar procediments complexos	35%	35%
Resolució de problemes	20%	30%

Es va establir una escala per presentar els resultats comuns als 14 i als 16 anys amb uns nivells de referència que estableixen un conjunt de coneixements, d'habilitats i de competències i es van poder observar els nivells de millora entre les dues edats. Els resultats per blocs de continguts van ser els següents:

Blocs de continguts	**Percentatge d'encert als 14 anys**	**Percentatge d'encert als 16 anys**
Nombres i operacions	46%	54%
Mesura	40%	39%
Geometria	44%	44%
Estadística i probabilitat	44%	47%
Àlgebra i funcions	40%	60%

Una de les conclusions de l'estudi va se que el 72% dels alumnes de 14 anys i el 62% dels alumnes de 16 anys no sabien resoldre problemes senzills relacionats amb la proporcionalitat i els percentatges, no coneixien els cossos plans senzills ni les relacions entre els seus elements i no sabien resoldre equacions lineals senzilles.

Aquests són alguns exemples de les preguntes de contingut geomètric amb els resultats que es van obtenir.

Exemple 1: 14 anys

Un angle d'un paral·lelogram mesura 40º. Quant mesuren els altres tres angles?

a) Tots 40º
b) Un 40º i els altres dos 150º
c) Un 40º, un altre 100º i el tercer 220º
d) Un 40º i cadascun dels altres dos 140º
e) Un 40º, un altre 120º i el tercer 200º

Només van donar la resposta correcta *d*), el 19% dels alumnes. És notable també el fet que la resposta més freqüent va ser la *a*), amb un 42% de l'alumnat.

Exemple 2: 14 anys

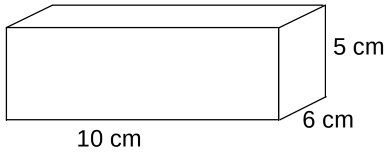
La publicitat d'un diari té un cost proporcional a l'àrea que ocupa. Si un anunci de 5 cm per 8 cm costa 2000 ptes, quant costarà un altre anunci de 6 cm per 10 cm?

a) 3.000 ptes.
b) 2.500 ptes.
c) 2.400 ptes.
d) 2.000 ptes.
e) 4.000 ptes.

Van donar la resposta correcta *a*) el 48% dels alumnes.

Exemple 3: 16 anys

Quants centímetres quadrats de cartró es necessiten per construir una capsa, amb tapa, de dimensions 5 cm, 6 cm i 10 cm?



a) 140
b) 220
c) 250
d) 280
e) 300

Només van donar la resposta correcta *d*), el 21% dels alumnes. És notable també el fet que la resposta més freqüent va ser la *e*), amb un 51% de l'alumnat.

Exemple 4: 16 anys

Tenim 75 m de corda i l'enrotllem al voltant d'una llauna cilíndrica de 10 cm de radi. Quantes voltes donarem?

a) 119
b) 150
c) 110
d) 100
e) 200

Van donar la resposta correcta *a*), el 25% dels alumnes. La resposta més freqüent va ser la *b*), amb un 28% de l'alumnat.

El resum de resultats fet públic contenia també un estudi per sexes i es concloïa que els nois eren lleugerament millors en matemàtiques mentre que les noies eren millors en llengües.

D'altra banda, els resultats es van separar per comunitats autònomes i la premsa va publicar un rànquing per comunitats referent a les àrees i matèries estudiades. Catalunya no va sortir ben parada i, particularment a matemàtiques, va quedar per sota de la mitjana estatal. El cert és que la implantació de la LOGSE era molt diversa a tot l'Estat i que no resultava gaire rigorós fer segons quines comparacions. A més, a Catalunya es va criticar que les proves, en ser de resposta tancada, només mesuraven algunes de les competències de l'alumnat.

En qualsevol cas, els resultats de matemàtiques i especialment de geometria eren clarament dolents, fins i tot colpidors en alguns aspectes i van servir fins a cert punt per justificar la implantació del nou sistema educatiu.

1.4.3. Proves de l'INCE del 2000

L'any 2000, l'INCE va dur a terme l'estudi *Evaluación de la educación secundaria obligatoria 2000*. A les proves i qüestionaris hi van participar un total de 328 centres i 7486 alumnes de tot l'Estat. Concretament, Catalunya hi va prendre part amb 57 centres i 1333 alumnes de 4t d'ESO. Les àrees estudiades van ser: ciències naturals, ciències socials, geografia i història, llengua castellana i literatura i matemàtiques.

El conjunt de la prova de matemàtiques constava de 84 preguntes de tipus test amb quate o cinc opcions de resposta relacionades amb diversos aspectes del currículum de l'àrea i de quatre problemes en què els alumnes havien d'exposar tot el procés de resolució. Amb aquesta bateria de preguntes es van elaborar quatre models de prova amb quinze preguntes comunes i un problema cadascuna. Cada alumne tenia una hora i quinze minuts per fer la prova i respondre algunes preguntes referents a metodologia, a l'ús de materials i als procediments d'avaluació observats a les classes de matemàtiques.

Cadascuna de les preguntes es va classificar des de dues dimensions: continguts i operacions cognitives. Els blocs de continguts considerats i els percentatges de preguntes de cada bloc eren els següents:

Blocs de continguts	**Nombre de preguntes**	**Percentatge**
Nombres i operacions	35	42%
Mesura, estimació i càlcul de magnituds	18	21%
Representació i organització de l'espai	9	11%
Interpretació, representació i tractament de la informació i tractament de l'atzar	22	26%

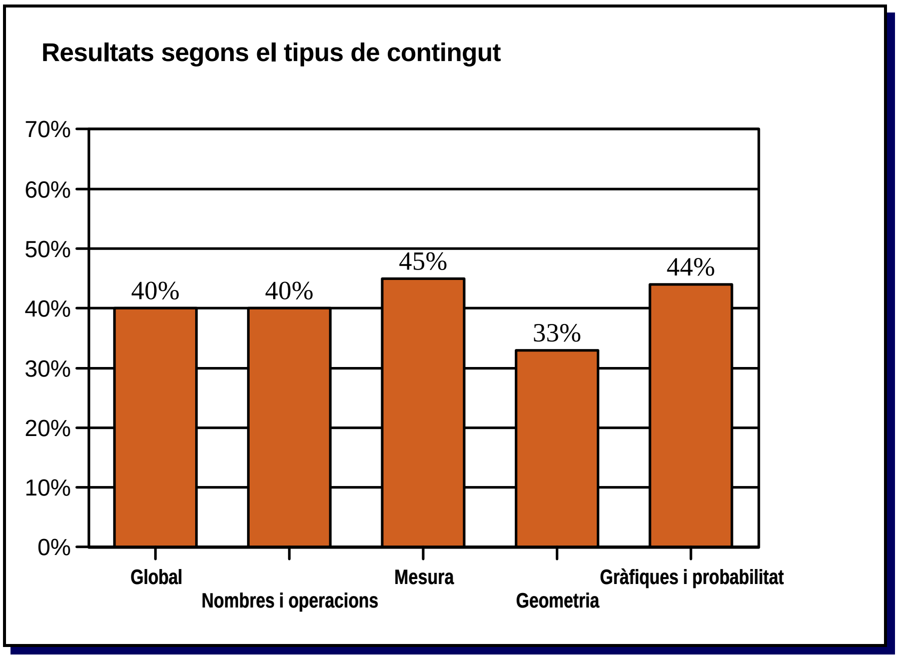
Pel que fa a les operacions cognitives es tenia:

Operació cognitiva	**Nombre de preguntes**	**Percentatge**
Coneixement	11	13%
Habilitats bàsiques	28	33%
Procediments complexos	19	23%
Resolució de problemes	26	31%

El percentatge mitjà d'encerts a les preguntes de la prova va ser del 40%. Els resultats per blocs de continguts van ser els següents:

Blocs de continguts	**Percentatge d'encerts**
Mitjana global	40%
Nombres i operacions	40%
Mesura, estimació i càlcul de magnituds	39%
Representació i organització de l'espai	33%
Interpretació, representació i tractament de la informació i tractament de l'atzar	44%

Les mancances en els aspectes referents a la formació geomètrica són especialment significatives. Val la pena presentar-ho gràficament:



L'informe de l'INCE inclou també l'estudi dels resultats segons el sexe dels alumnes i segons la titularitat del centre: l'encert global de les noies és del 38% i el dels nois del 42%; l'encert global de l'alumnat de centres públics és del 38% i el dels centres privats del 44%.

A més de les preguntes de resposta tancada, els alumnes havien de resoldre un problema en quinze minuts. Dos dels problemes proposats eren de contingut geomètric i els resultats obtinguts van ser els següents:

Problema modelo A

Javier y José Luis han comprado cada uno un remo de 3 m. Los ascensores de cada casa tienen las siguientes dimensiones:

En casa de Javier:	En casa de José Luis:
Anchura: 1,5 m	Anchura: 1,5 m
Profundidad: 2 m	Profundidad: 1,5 m
Altura: 2 m	Altura: 2,2 m

¿Tendrá alguno de ellos que utilizar, necesariamente, otros medios distintos del ascensor para subir el remo a su casa?
Explica el proceso seguido para resolver el problema.

Argumentació i càlculs correctes: 9%
Argumentació incorrecta i càlculs incorrectes: 33%
Resposta en blanc: 23%

Problema modelo C

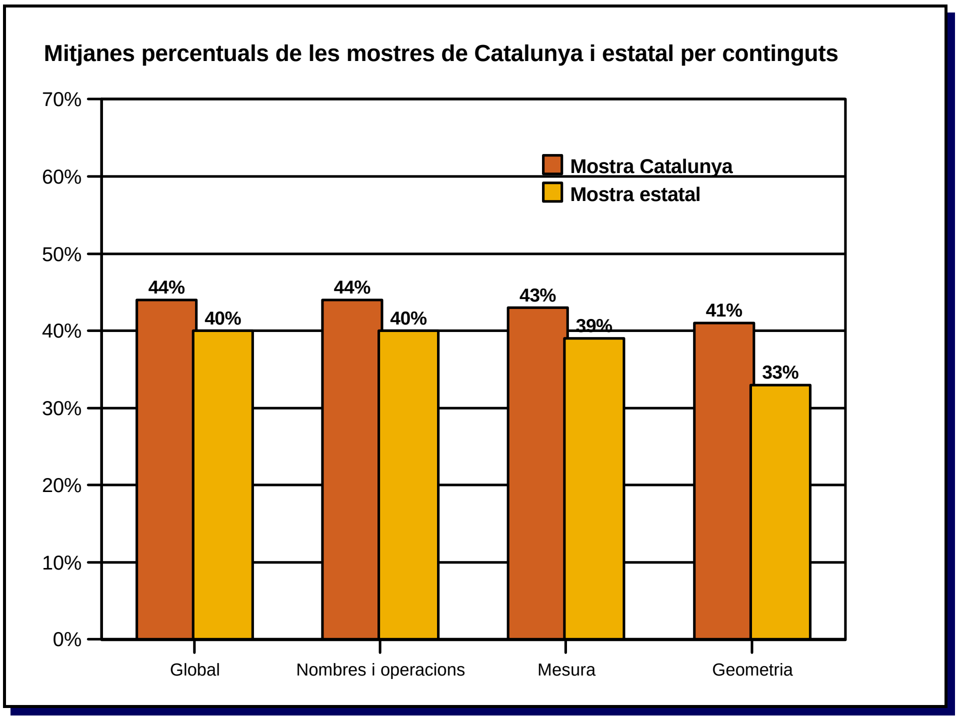
Sobre una cartulina blanca se dibujan dos circunferencias tangentes, de manera que una pase por el centro de la otra. El círculo menor, que tiene un área de 9 cm^2, se colorea de rojo.

¿Cuál es el área de la zona del círculo grande que queda en blanco?

Haz un gráfico y explica el proceso seguido para llegar a la solución.

Argumentació i càlculs correctes: 4%
Argumentació incorrecta i càlculs incorrectes: 52%
Resposta en blanc: 17%

El Departament d'Ensenyament i el Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu van donar els resultats específics de Catalunya que, a diferència dels del 1995, van ser superiors a la mitjana de l'Estat. Els resultats que es van fer públics són els següents:



Les proves deixen força clar que hi ha unes grans mancances en la formació geomètrica de l'alumnat. A Catalunya, tot i que els resultats siguin lleugerament millors, també cal concloure que els problemes de formació geomètrica de l'alumnat de 4t d'ESO són molt rellevants. S'ha de constatar també que a les altres àrees avaluades els resultats no són tan dolents ni de bon tros.

L'estudi per sexes sembla demostrar que encara hi ha un bon camí a fer en qüestions de distribució de rols socials als nois i a les noies.

L'estudi dels resultats en funció de la titularitat dels centres es pot interpretar de manera diversa. Sembla, però, que les diferències s'haurien de relacionar amb la distribució esbiaixada del nivell socioeconòmic de l'alumnat entre uns i altres centres més que amb qualsevol altre factor.

Les conclusions referents a les variables de context sembla que certifiquen també que el nivell socioeconòmic de les famílies és determinant.

1.4.4. Les proves de competències bàsiques als 10 anys

Els primers indicadors externs específics relatius a les competències bàsiques que pot haver assolit l'alumnat es van fer públics el curs 2001-2002 i es refereixen a les proves fetes a Catalunya l'any 2000 a l'alumnat de 4t de primària (10 anys). Des de la perspectiva de l'àrea de matemàtiques, els resultats no es poden considerar bons: només un 63,3% de l'alumnat assoleix les competències bàsiques en matemàtiques.

Aquests són els resultats que es van fer públics el 2002:

Competències avaluades de l'àmbit matemàtic el curs 2000-2001	**Percentatge d'alumnes que assoleix la competència**
Mitjana global	63,3
M1• Aplicar el coneixement del sistema de numeració decimal i de les operacions per comparar, relacionar nombres i operar amb rapidesa, buscant segons la situació un resultat exacte o aproximat:	
– Càlcul exacte amb temps controlat.	41
– Càlcul exacte amb temps no controlat.	54
– Càlcul aproximat.	73
M2• Utilitzar les tècniques i convencions de la representació geomètrica bidimensional, en particular compondre i descompondre formes geomètriques complexes a partir de formes simples.	70
M3• Emprar amb criteri les unitats de mesura.	78
M4• Usar amb propietat instruments i tècniques per dibuixar, mesurar i calcular, quan sigui necessari.	59
M5• Planificar i seguir alguna estratègia per resoldre un problema i modificar-la, si no és prou eficaç.	53
M6• Usar i interpretar llenguatge matemàtic com ara xifres, signes i altres representacions gràfiques o dibuixos per descriure fenòmens quotidians:	
– Dibuix.	92
– Gràfic.	73
– Xifres.	51
M7• Interpretar la funció que fan els nombres quan apareixen en un context real (expressar quantitat, identificació, temps, mesura, intervals) i usar-los d'acord amb les seves característiques.	75

L'àmbit de matemàtiques és el que obté els pitjors resultats entre tots els àmbits avaluats (la mitjana global és d'un 71,7% d'alumnes que assoleixen les competències bàsiques; i sense comptar l'àmbit matemàtic la mitjana és d'un 73,3%). Es pot adduir, certament, que a les proves de l'INCE del 1995-1996 i a proves internacionals, l'àrea de matemàtiques també és la que obté pitjors resultats. Tanmateix, les diferències no són tan marcades com en les proves fetes a casa nostra.

En la valoració dels resultats en l'àmbit matemàtic que feia el Departament d'Ensenyament, s'esmentava: "De manera general cal advertir que en estudis internacionals com ara el TIMSS (*Third Internacional Mathematics and Science Study*), realitzat l'any 1995, es constaten les mateixes dificultats en matemàtiques que ha tingut l'alumnat de Catalunya". S'ha de tenir en compte, però, que aquest estudi anava més enllà de les competències bàsiques en matemàtiques i se centrava en molts aspectes del currículum de l'àrea. D'altra banda, s'ha de recordar també que els resultats obtinguts per l'Estat espanyol a les proves TIMSS van ser més aviat lamentables: va ocupar la 32a posició de 39 països en la prova de 7è i la 31a posició de 41 països en la de 8è. No sembla, doncs, gaire adequat fer esment dels resultats en aquestes proves per amagar uns resultats que s'haurien de considerar força fluixos i decebedors.

Si ens centrem en els resultats que tenen a veure amb les competències geomètriques (M2• Utilitzar les tècniques i convencions de la representació geomètrica bidimensional, en particular compondre i descompondre formes geomètriques complexes a partir de formes simples; M3• Emprar amb criteri les unitats de mesura i M4• Usar amb propietat instruments i tècniques per dibuixar, mesurar i calcular, quan sigui necessari.), els alumnes obtenen una mitjana del 69% d'èxit. Això sembla indicar que el dèficit tradicional en geometria es podria estar corregint (a les proves INCE de 1995 i de 2000 els blocs de geometria i de mesura eren els que sortien més mal parats). Caldrà esperar, però, a tenir més dades per poder certificar aquesta tendència i caldrà veure també si la millora en geometria no es fa a costa d'altres blocs temàtics, especialment si tenim en compte el magre nombre d'hores que s'han dedicat a les matemàtiques en el període d'implantació de la LOGSE. Sigui com sigui, és evident que els resultats no es poden considerar bons i que ja als 10 anys un sector molt important de l'alumnat té greus problemes de formació geomètrica.

1.4.5. Les proves de competències bàsiques als 14 anys de l'any 2001

El curs 2001-2002 es van fer les proves de competències bàsiques per a alumnes de 14 anys a tots els centres de Catalunya. El Consell Superior d'Avaluació va realitzar l'aplicació externa de les proves a una mostra representativa dels centres d'educació secundària de Catalunya. La mostra estava constituïda per 3.329 alumnes de 2n curs d'ESO procedents de 125 centres. Aquest centres es van seleccionar de manera aleatòria i proporcional a la població d'escoles existents per delegació territorial perquè fos possible estudiar els resultats de la mostra agrupant els centres per hàbitat (nombre d'habitants de les localitats on estan ubicats els centres) i d'acord amb el nivell socioeconòmic baix, mitjà o alt (en una proporció del 20%, 60% i 20%, respectivament) en els estrats de població corresponents a més de 100.000 habitants i d'entre 10.000 i 100.000 habitants.

Novament cal fer un exercici de prudència a l'hora de valorar els resultats fets públics. Només la perspectiva d'un bon grapat de proves i de cursos permetrà fer anàlisis més acurades. Amb tot, és evident que aquestes proves, malgrat les mancances que hagin pogut tenir, proporcionen informació del màxim interès.

Els resultats publicats referents a l'àmbit matemàtic van ser els següents:

COMPETÈNCIES DE L'ÀMBIT MATEMÀTIC	Percentatge d'alumnes que assoleixen la competència	
	Criteri A	Criteri B
M1 Aplicar el coneixement del sistema de numeració decimal i de les operacions per comparar, relacionar nombres i operar amb rapidesa, buscant segons la situació un resultat exacte o aproximat.	49	60
M3 Emprar amb precisió i criteri les unitats de mesura.	54	78
M4 Usar amb propietat instruments i tècniques per dibuixar, mesurar i calcular.	60	87
M5 Planificar i seguir estratègies de resolució de problemes i modificar-les si no es mostren prou eficaces.	50	68

COMPETÈNCIES DE L'ÀMBIT MATEMÀTIC	Percentatge d'alumnes que assoleixen la competència	
	Criteri A	Criteri B
M6b Usar i interpretar llenguatge matemàtic (representacions gràfiques) per descriure fenòmens habituals.	69	91
M7 Interpretar la funció que fan els nombres quan apareixen en un context real (expressar quantitat, identificació, temps, mesura, intervals) i usar-los d'acord amb les seves característiques.	50	67
M8 Reconèixer i interpretar gràficament relacions senzilles de dependència funcional existents entre conjunts de dades d'ús quotidià, en particular en casos de proporcionalitat directa.	67	82

Els percentatges d'èxit que es recullen a la taula anterior fan referència a dos criteris de superació. Convé recordar que, inicialment, es va fixar un criteri de superació (criteri A) i que, després, en el document de presentació de resultats, es va fer públic també un criteri suplementari (criteri B). Aquests són els dos criteris:

• Criteri A. Assoliment de la competència de manera consistent, que correspon a la superació del 65% dels ítems que s'hi refereixen.

• Criteri B. Assoliment de la competència de manera suficient, que correspon a la superació del 50% dels ítems que s'hi refereixen.

En relació a aquesta qüestió es donen les justificacions següents en el document de *Síntesi de resultats*:

"[...] Així mateix, l'anàlisi dels resultats posa de manifest que hi ha un nombre important d'alumnes que obté puntuacions molt properes a les que s'han fixat en el criteri de superació de la competència. Es veu que l'adopció del criteri de superació del 65% d'ítems equival al que en l'escala usual de 0 a 10 seria el 6,5 i que, per tant, si se supera representa que es posseeix la competència amb un grau notable. Es veu també que hi ha un gran nombre d'alumnes en la franja de superació situada entre el 50% i el 65% dels ítems o, en altres paraules, entre el 5 i el 6,5, la qual cosa equival en la pràctica d'avaluació usual a admetre que es posseeix la competència en un grau suficient.

L'objectiu en acabar l'ensenyament obligatori és que tot l'alumnat arribi a assolir les competències bàsiques amb un nivell alt de consolidació. L'avaluació, però, d'aquestes competències dos anys abans de finalitzar l'etapa obligatòria porta a esperar uns resultats més baixos en les proves, de manera que s'han considerat dos nivells de superació: el del 65% (A) i el del 50% (B) dels ítems, representatius respectivament d'un assoliment ja consolidat i un assoliment acceptable en funció de l'edat dels alumnes.

Per aquest motiu, els resultats obtinguts en la mostra de centres on s'han aplicat les proves es presenten en dues columnes, corresponents als percentatges d'alumnes que han superat les competències d'acord amb els dos criteris assenyalats [...]"

El cert és que aquest canvi de criteri fet *a posteriori* no sembla gaire elegant. Cal emmarcar-lo, però, en la complexitat de tot un procés en el qual hi havia poca experiència prèvia. És probable també que hi hagi influït la voluntat de no presentar uns resultats massa catastròfics.

El mateix document recull a més, en un annex, els resultats referents a les competències avaluades amb un nombre reduït d'ítems (cinc o menys). En el cas de matemàtiques això corresponia a les competències següents:

* Competències - Àmbit matemàtic	Percentatge de respostes correctes				
	1	2	3	4	5
M2 Utilitzar les tècniques i convencions i el llenguatge de la representació geomètrica per compondre i descompondre formes geomètriques complexes a partir de formes simples.	18%	32%	30%	12%	3%
M6a Usar i interpretar llenguatge matemàtic (dibuixos) per descriure fenòmens habituals.	39%	25%	18%	–	–
M6c Usar i interpretar llenguatge matemàtic (signes) per descriure fenòmens habituals.	23%	16%	22%	18%	–
M9 Comparar la factibilitat de fets aleatoris en situacions simples.	29%	8%	32%	–	–

S'ha de constatar que la separació d'aquestes competències mesurades amb un nombre insuficient d´ítems ha apartat dels resultats globals i del resum de premsa fet públic un nombre considerable d'exercicis que van tenir resultats extremadament fluixos.

Si ens fixem específicament en les competències relacionades amb la geometria (M2: Utilitzar les tècniques i convencions i el llenguatge de la representació geomètrica per compondre i descompondre formes geomètriques complexes a partir de formes simples; M3: Emprar amb precisió i criteri les unitats de mesura; M4: Usar amb propietat instruments i tècniques per dibuixar, mesurar i calcular i M6a: Usar i interpretar llenguatge matemàtic (dibuixos) per descriure fenòmens habituals.), hem de concloure que els resultats revelen una situació preocupant: un percentatge molt significatiu de l'alumnat no té assolides les competències bàsiques de geometria als 14 anys.

El document *Síntesi de resultats* també presenta un interessant estudi dels resultats de cada competència en relació amb els factors hàbitat i nivell socioeconòmic. A l'apartat d'anàlisi dels resultats es diu el següent:

> *"Hi ha hagut diferència de resultats segons l'hàbitat on s'ubiquen els centres. En general, l'alumnat de poblacions de més de 100.000 habitants ha obtingut resultats més alts, tot i que les diferències són poc significatives. Pel que fa a les diferències de resultats segons el nivell socioeconòmic de les zones on s'ubiquen els centres, s'han donat en totes les competències."*

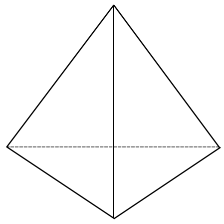
El cert és que les diferències entre el nivell socioeconòmic alt i el mitjà no són gaire significatives. En canvi, hi ha un salt important (de 15 a 20 punts percentuals) quan es passa al nivell socioeconòmic baix. Es pot afirmar, doncs, que el nivell socioeconòmic baix és determinant per al no assoliment de les competències bàsiques en matemàtiques i en geometria.

És interessant recordar algunes de les activitats de la prova relacionades amb la geometria amb els percentatges d'èxit que va obtenir l'alumnat de la mostra. Concretament, la competència M2 (Utilitzar les tècniques i convencions i el llenguatge de la representació geomètrica per compondre i descompondre formes geomètriques complexes a partir de formes simples) es mesurava amb aquests dos exercicis que comportaven un total de cinc ítems:

***** S'indica per a cada competència el percentatge d'alumnes que respon correctament cadascun dels ítems.

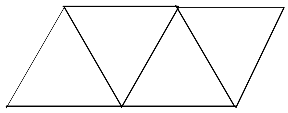
ACTIVITAT 2

1. Un tetràedre regular és un políedre que té quatre cares, cada una de les quals és un triangle equilàter.



Digueu si els següents conjunts de quatre triangles equilàters corresponen al desenvolupament pla d’un tetràedre o no:

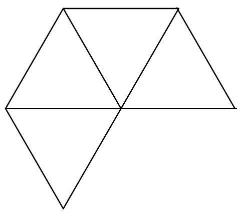
a.



☐ Sí ☐ No

Aquest apartat va tenir un 18% d’encerts.

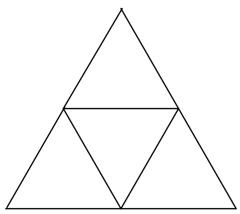
b.



☐ Sí ☐ No

Aquest apartat va tenir un 32% d’encerts.

c.

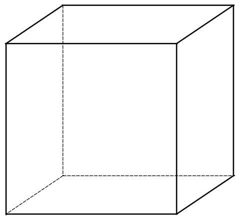


☐ Sí ☐ No

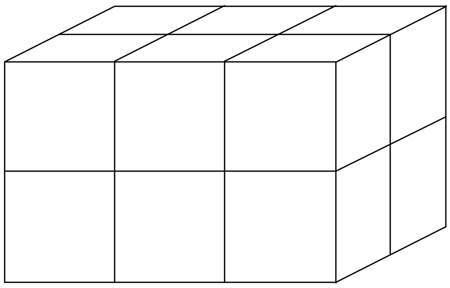
Aquest apartat va tenir un 30% d’encerts

ACTIVITAT 2

2. Es considera un cub com el del dibuix.



Amb dotze cubs com aquest, es fa la construcció següent:



Algunes de les cares dels dotze cubs han quedat a l'exterior i les altres, a l'interior.

a. Quantes cares queden a la part exterior de la construcció?

....

Aquest apartat va tenir un 12% d'encerts

b. Quantes cares queden a la part interior de la construcció?

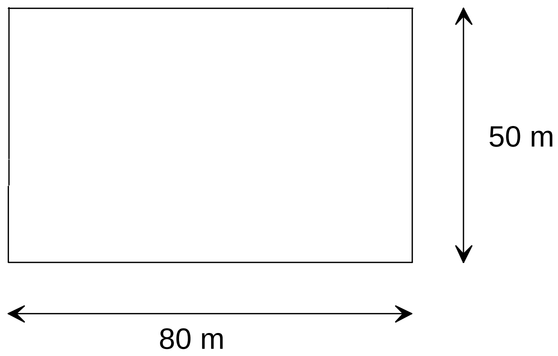
....

Aquest apartat va tenir un 3% d'encerts

La competència M6a (Usar i interpretar llenguatge matemàtic (dibuixos) per descriure fenòmens habituals.) es mesurava amb aquestes tres activitats que comportaven un total de tres ítems (l'exercici 8.1 de l'activitat 8, que inicialment també havia de contribuir a mesurar aquesta competència, es va haver de suprimir en comprovar-se que tenia errors de disseny):

ACTIVITAT 6

Es disposa d'un camp cultivable de forma rectangular. Les seves dimensions són de 50 m d'ample i 80 m de llarg.



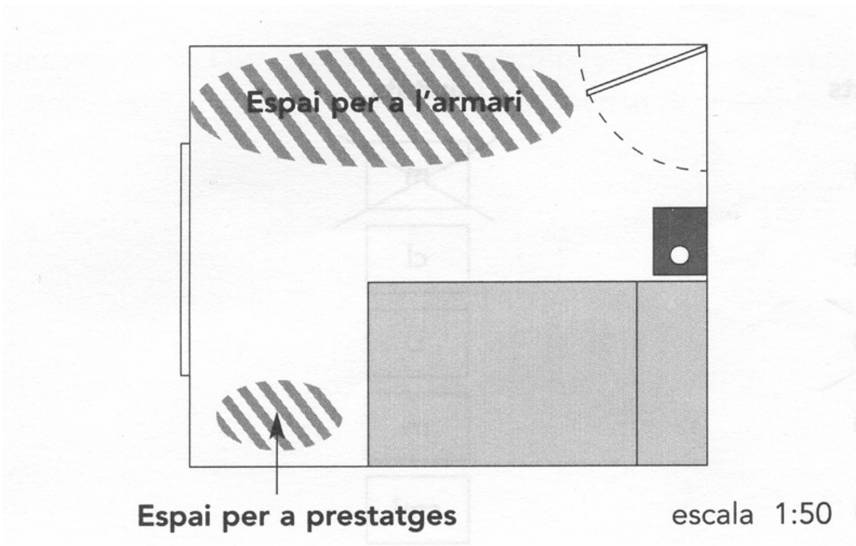
1. Quants metres de tanca caldran, si es vol envoltar totalment?

....

Aquest apartat va tenir un 39% d'encerts

ACTIVITAT 8

2. (La Maria) També vol posar un armari a la seva habitació. Per poder-ne planificar la col·locació, ha dibuixat un esquema de l'habitació a escala 1:50.



Si la Maria vol aprofitar al màxim l'espai, i tenint en compte que la porta de l'habitació s'ha de poder obrir completament, quina serà l'amplada màxima de l'armari que s'hi pot col·locar?

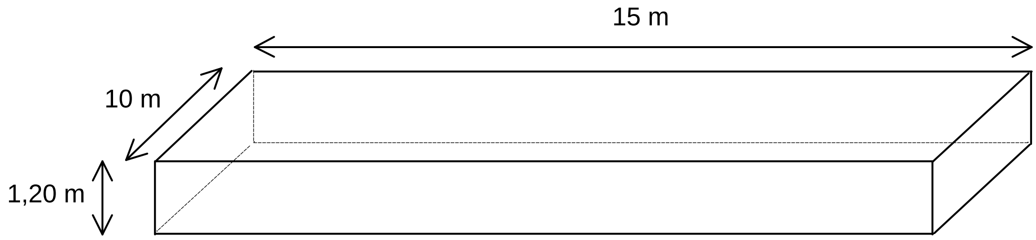
....

Aquest apartat va tenir un 25% d'encerts

ACTIVITAT 10

En unes instal·lacions esportives hi ha dues piscines, una per a aprenents i l'altra per a la gent que ja sap nedar.

La piscina per a aprenents té 10 m d'ample per 15 m de llarg. La fondària és d'1,20 m.



(el dibuix és il·lustratiu, no és a escala)

1. Quin és el volum, en metres cúbics, de la piscina?

....

Aquest apartat va tenir un 18% d'encerts

1.5. PRIMERES CONCLUSIONS

L'anàlisi dels resultats globals obtinguts per l'alumnat en aquestes proves i els resultats recollits en els exemples concrets d'activitats relacionades amb la geometria ens indiquen prou clarament que hi ha un percentatge molt important d'alumnes amb greus mancances en la seva formació. A més, és clar que el problema no és nou: les proves que incloïen alumnat del sistema educatiu anterior a la LOGSE ho certifiquen.

És cert que el problema és internacional i que molts països desenvolupats tenen greus dificultats amb la formació geomètrica i matemàtica dels seus ciutadans. S'ha de reconèixer, però, que a casa nostra ho tenim pitjor, amb l'agreujant, a més, que no es denuncia la gravetat de la situació.

El repte de l'ensenyament i l'aprenentatge de les competències matemàtiques és de gran dificultat i afecta moltes persones arreu del món. Sembla difícil d'entendre que persones adultes amb una posició social sense problemes, o fins i tot rellevant, no tinguin assolides les competències bàsiques matemàtiques després de tots els anys d'escolarització. La contradicció és colpidora: d'una banda, es parla de la gran importància de les matemàtiques i es fan servir les matemàtiques per seleccionar les persones; d'altra banda, tot i la certesa, demostrada en proves i avaluacions de tot tipus, que hi ha unes mancances extremadament greus de formació matemàtica, molts sectors socials, i fins i tot bona part de les elits i dels governants, no hi paren la més mínima atenció. Aquestes dues cites de John Allen Paulos a *El hombre anumérico* i d'Alan Bishop a *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* apunten aquests problemes:

> *"M'angoixa i m'afligeix una societat, la meva, que depèn tant de les matemàtiques i de la ciència i que, tanmateix, sembla tan indiferent a l'anumerisme i a l'analfabetisme científic de molts dels seus ciutadans." (John Allen Paulos, 1990)*
>
> *"El problema radica en el fet que les matemàtiques s'han convertit en una cosa tan important en tots els països desenvolupats del món que la societat actual espera, en general, que a tots els alumnes se'ls ensenyi moltes matemàtiques." (Alan Bishop, 2000)*

L'anàlisi dels resultats de les proves de competències bàsiques als 14 anys en relació al nivell socioeconòmic de l'alumnat posa en evidència que les capes socials més desafavorides concentren una gran proporció d'alumnat amb greus mancances de formació geomètrica i matemàtica.

Caldria, doncs, concentrar els esforços en aquest sector de la població. A més, si tenim en compte que, com és sabut, els alumnes que provenen de sectors amb nivell socioeconòmic baix es concentren en els centres públics, s'ha de pensar que l'administració pública hi té una especial responsabilitat. No sembla suficient afirmar que aquest és un problema comú a totes les competències i seria interessant que l'administració educativa estudiés propostes i estratègies que permetessin la disminució d'aquestes diferències.

La cita següent de Núria Gorgorió i Alan Bishop a *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* apunta la necessitat de deixar de banda la imatge elitista de les matemàtiques i democratitzar-les:

> *"Sigui quin sigui el motiu pel qual la formació matemàtica dels nostres alumnes s'ha convertit en un instrument de selecció, superar la imatge elitista de la cultura matemàtica representa un repte afegit per als professionals que estiguin convençuts de la necessitat d'una educació matemàtica per a tothom. D'altra banda, el futur de la nostra societat depèn de la qualitat de l'educació que proporcionem als nostres alumnes. Segons el nostre parer, un dels reptes més grans de la nostra comunitat professional consisteix a lluitar contra la ignorància i democratitzar el coneixement matemàtic sense el qual una gran part dels nostres joves es troben en franc desavantatge davant d'una societat que canvia constantment." (Núria Gorgorió i Alan Bishop, 2000)*

No s'ha de pensar, però, que les greus mancances de formació geomètrica i matemàtica només afecten les capes socials de nivell socioeconòmic baix. Es tracta d'un fenomen que pot afectar tot tipus de persones. La cita següent de Peter Hilton a *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* resulta esclaridora:

> *"Tot sovint, una dosi substancial d'aquesta pretesa educació matemàtica condueix amb massa freqüència al desgrat per la matèria i a la incompetència matemàtica, de manera que una gran part dels adults, després de 12 anys lluitant amb l'assignatura, només se senten còmodes amb les operacions bàsiques de l'aritmètica elemental amb nombres naturals. A més, aquest desgrat i la incompetència en la matèria afecten freqüentment persones sensibles i intel·ligents. Aquestes persones són propenses a fer pública la seva manca de coneixement matemàtic com si fos una virtut positiva i contribueixen a crear l'absurda llegenda que ser analfabet matemàtic és digne d'encomi [...]." (Peter Hilton, 2000)*

A tot això s'hi afegeix la tendència a confondre les matemàtiques amb l'aritmètica i amb l'àlgebra, i a atorgar un paper merament subsidiari i anecdòtic a la geometria. No és estrany, doncs, que els resultats específics en geometria siguin especialment dolents.

Pràcticament tots els experts coincideixen a dir que la postergació de la geometria en els programes educatius de secundària durant els anys setanta i vuitanta del segle XX va ser un greu error de planificació i que calia atorgar novament a la geometria sintètica (o a la geometria mètrica clàssica) i, sobretot, a la geometria experimental un paper important en els processos d'ensenyament-aprenentatge. Des de la implantació dels nous programes educatius concretats a la LOGSE i encara amb la propera implantació de la LOCE, sembla que es vol recuperar el paper de la geometria. Tanmateix, els problemes de formació no han desaparegut ni de bon tros.

La implantació de la LOGSE va tenir com a aspectes positius una racionalització dels programes amb un clar retorn a la geometria i una manifesta voluntat de canvi metodològic. D’altra banda, però, també va comportar aspectes clarament negatius com ara la disminució del nombre d’hores de matemàtiques, la disminució del rigor i de l’exigència, i la dispersió dels centres d’atenció de l’alumnat.

En el sistema educatiu anterior a la LOGSE es disposava de més hores de matemàtiques i la diversitat de l’alumnat no era tan elevada com ara. Els continguts curriculars, però, no s’ajustaven a l’assoliment de les competències bàsiques en geometria. El nombre d’alumnes per aula era molt elevat i la metodologia del professorat tot sovint era molt clàssica i anàloga a la de la universitat, amb classes magistrals i poca o nul·la participació de l’alumnat. El professorat pressuposava que els alumnes que aprenien a calcular equacions de rectes perpendicular també sabrien, per exemple, resoldre problemes de la vida quotidiana relacionats amb qüestions de geometria. Això, però, no és cert i sense un treball específic de les competències geomètriques bàsiques, només una minoria estricta d’alumnes és capaç d’assolir-les pel seu compte.

Potser és el moment que ens preguntem per què tenim uns resultats tan dolents en matemàtiques i en geometria. Per què els resultats a l’àrea de matemàtiques i en els blocs de geometria són comparativament pitjors que els d’altres àrees i d’altres blocs de continguts estudiats? Es tracta de preguntes que no tenen una resposta trivial. És, però, estrictament necessari que ens les fem si volem trobar solucions.

Cal apuntar com a possibles causes de la desafortunada situació de l’ensenyament i de l’aprenentatge de les matemàtiques i de la geometria a casa nostra els factors següents:

a) Les poques hores de formació matemàtica que té l’alumnat.

> Des d’alguns sectors de l’administració es diu que aquest factor no és determinant. Es diu també que es tracta més aviat de fixar-se en la metodologia i que cal treballar les competències matemàtiques des de les altres àrees. El cert, però, és que, amb els programes actuals, el professorat es veu obligat a fer matemàtiques amb pressa, la qual cosa és una aberració.
>
> Només cal que recordar el cas del Regne Unit: arran dels resultats obtinguts en el TIMSS (*Third Internacional Mathematics and Science Study*), tot i que van quedar, respectivament, vuit i quatre llocs per sobre d’Espanya en la “classificació” per països referents a 7è i 8è, van decidir, entre d’altres coses i després d’un gran debat amb força ressò, augmentar el nombre d’hores de matemàtiques Doncs bé, a les proves OCDE/PISA, després d’uns quants anys d’implantació de les reformes, el Regne Unit obté uns magnífics resultats en matemàtiques, mentre que Espanya i Catalunya segueixen a la cua de la llista.

b) La mala imatge de les matemàtiques a la nostra societat.

No descobrirem res de nou si diem que les matemàtiques tenen poca tradició i poc arrelament a casa nostra i que en molts sectors socials, fins i tot amb elevats graus de formació, no se les considera importants ni es considera que siguin cultura.

D'altra banda, s'ha de tenir en compte també que el professorat de matemàtiques ha tingut i té encara una clara responsabilitat en aquest assumpte. Massa sovint, el prestigi de les matemàtiques s'ha volgut defensar a base de suspendre molta gent. Massa sovint també a les aules s'han practicat unes matemàtiques centrades en exercicis mecànics sense connexió amb la realitat, sense reflexió i sense imaginació, que són un autèntic martiri per a bona part de l'alumnat. La utilització de les matemàtiques com a instrument de selecció (aquesta és una tradició comuna a tot el món) tampoc ajuda a donar bona imatge. Finalment, es pot apuntar que l'elitisme d'alguns professionals, que consideren que les matemàtiques estan per sobre de totes les activitats humanes i menyspreen la divulgació, tampoc hi ajuda.

c) La poca consideració que es dóna a la geometria.

La geometria no es considera important. Com s'ha dit, hi ha una marcada tendència a confondre les matemàtiques amb l'aritmètica i amb l'àlgebra, amb la qual cosa la geometria passar a tenir un paper subsidiari.

A tall d'exemple, val la pena recordar els resultats de l'estudi dut a terme entre els anys 1997 i 1999 per a la identificació de les competències bàsiques. L'estudi el va coordinar el Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu per encàrrec del Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya i comptava amb el suport de la Fondation des Régions Européennes pour la Recherche en Éducation et en Formation (FREREF)[1]. A l'estudi hi van participar tres regions: Catalunya, Balears i Canàries.

La idea genèrica consistia a passar uns amplis qüestionaris a col·lectius diversos que representessin tota la societat, per tal d'establir un rànquing d'importància de les competències considerades. A partir de l'anàlisi dels currículums de les regions que van participar a l'estudi, de la revisió d'estudis anteriors i d'un seguit d'entrevistes amb representants de diversos sectors es van elaborar els qüestionaris.

Els qüestionaris es van passar a diversos col·lectius socials: docents de tercer cicle d'educació primària, docents d'ESO, famílies (pares i mares), alumnes de 4t d'ESO, exalumnes, representants d'empreses de selecció personal, representants d'institucions, professors universitaris, representants d'organitzacions de consumidors, representants d'ONG, representants del món de la sanitat, representants educatius i representants sindicals, amb un total d'unes 1000 persones.

Els resultats referents a la consideració que mereix la geometria són prou clars. Per exemple, es constata que entre les primeres vint competències de les 245 considerades, només dues són de matemàtiques: la primera i la vintena, totes dues relacionades amb el càlcul aritmètic.

1. La FREREF és una fundació regional europea creada l'any 1991 a iniciativa de les Régions Européennes de Rhône-Alpes, Llombardia, comunitat francesa de Bèlgica i Catalunya. Més tard s'hi van incorporar les regions de Balears, la república del cantó de Ginebra, el land de Baden-Württemberg i Luxemburg. La seva seu central és a Brussel·les i la seva secretaria permanent és a Lió.
La FREREF es defineix com una plataforma de comunicació i cooperació que afavoreix els intercanvis entre responsables polítics i científics encarregats de la recerca en el camp de l'educació i la formació. La FREREF vol ser una xarxa de xarxes. En concret, té la missió d'estimular, d'animar i de fer de mitjancera en els treballs dels seus participants.

Cal dir també que de les trenta-tres competències finals considerades en els qüestionaris de l'àmbit matemàtic només cinc eren de geometria. A més, els resultats de les enquestes revelen que dels cinc àmbits considerats -matemàtic, social, lingüístic, tecnocientífic i laboral- el matemàtic va ser el menys valorat de tots i entre els trenta-quatre subàmbits considerats, es va concedir menys importància al de geometria.

d) Les deficiències en la formació del professorat.

En els cas de primària, les mancances de formació matemàtica i específicament geomètrica d'alguns professionals són colpidores. En el cas de secundària, la incorporació de professorat que no està especialitzat clarament en la matèria i les mancances generalitzades de formació pedagògica són també molt grans. Ens hauríem de preguntar quina perspectiva de la matèria poden tenir aquestes persones i si s'ha de fiar tot a la formació permanent voluntària.

e) És molt probable també que el currículum i la metodologia emprada no siguin els adequats.

Ara mateix el professorat de secundària té la gran dificultat d'administrar un nombre d'hores de matemàtiques escàs que, aparentment, el condueix a un problema sense solució: si opta per centrar-se en els continguts escolars, no es treballen prou les competències bàsiques; i si opta per treballar amb profunditat les competències bàsiques, es presenten grans mancances en relació als continguts prescrits per la legislació. No sembla lògic que hagin de ser els centres i els professors els qui resolguin aquesta contradicció estructural que, com s'està demostrant, condueix a una formació matemàtica deficient.

Pel que fa a la metodologia, molts sectors del professorat segueixen arrelats a mètodes clàssics i la majoria de llibres de text no se n'allunyen gaire. L'aparició de nous materials didàctics com ara els entorns geomètrics dinàmics ha tingut una incidència escassa a les aules (de vegades, tot s'ha de dir, per una lamentable manca de recursos).

D'altra banda, els cursos de formació permanent són un embolic i una mostra pintoresca de les coses més diverses de tal manera que un professor de matemàtiques pot fer muntanyes de cursos reconeguts i validats per l'administració sense que en cap moment es revisin les opcions metodològiques a l'aula. El de la metodologia és, probablement, un dels aspectes més conflictius i més difícils de canviar.

f) Els canvis constants en el sistema educatiu.

En els darrers deu o dotze cursos escolars el professorat ha assistit estupefacte als canvis constants de programacions, de currículum, de distribució d'hores i de perspectives generals. L'educació vol certa estabilitat i la desfilada permanent de canvis només condueix al desconcert i al cansament. Molts professionals ja no saben ben bé on paren.

g) Manca d'exigència i de motivació per a l'estudi.

La societat en què vivim ha portat a considerar que tot ha de ser molt fàcil i molt lúdic. La cultura de l'esforç va de baixa. Hi ha una urgent necessitat de recuperar l'estudi i el treball com a condicions inherents a l'educació primària i secundària. L'alumnat, les famílies i la societat en general semblen haver oblidat que sense esforç i sense estudi difícilment hi haurà aprenentatge.

Probablement, una lectura apocalíptica dels resultats tampoc ens duria enlloc. Tanmateix, una mica d’autocrítica en relació a tot el sistema educatiu és estrictament necessària i en certs sectors del professorat, ja greument perjudicat i desconcertat per l’allau de canvis constants de perspectiva, s’hauria agraït que les administracions encapçalessin aquesta autocrítica.

Ara mateix tenim prou clar que el problema ve de lluny i, malgrat totes les reformes i canvis del sistema educatiu, el cert és que afrontem el segle XXI amb la constatació que grups molt importants de la societat estan pràcticament condemnats a ser analfabets matemàtics.

El sector educatiu i la societat, tot i que comencen a adquirir consciència de les gran carències de formació bàsica en matemàtiques de l’alumnat perquè les proves ho demostren, només han reaccionat, fins ara mateix, de manera més aviat tímida. De vegades, s’atribueixen aquestes mancances a les deficiències del nou sistema educatiu i no es vol veure que les arrels del problema són molt més profundes. La part positiva de la situació és que tenim els instruments per fer un bon diagnòstic. Hi ha, però, un llarg camí a recórrer i moltes coses que s’hauran d’esmenar.

El punt de partida és, doncs, més aviat magre, tot i que això potser ens hauria d’animar perquè serà fàcil millorar.

✍

Exercicis i activitats proposades

1. Per concretar la introspecció que es recomanava fer com a exercici a l’apartat 1.1, es proposa respondre el qüestionari següent:

1) Quina geometria ens han ensenyat? A quin nivell educatiu? Què hem hagut d'aprendre pel nostre compte?
2) Els meus professors i professores consideraven important la geometria? Es preocupaven per ensenyar-nos a pensar i a raonar geomètricament?
3) Com ens van ensenyar la geometria? A partir de l'experiència? De forma deductiva o inductiva?
4) Se sol treballar més la geometria analítica o la geometria sintètica? Quines apteses tenim tendència a desenvolupar en l'alumnat?
5) Quins tipus de problemes geomètrics se solen treballar amb els alumnes? Problemes reals i connectats amb l'entorn o més aviat problemes abstractes?
6) S’ensenya als alumnes a pensar geomètricament? Què fa el professorat per tal de desenvolupar les capacitats geomètriques de l’alumnat?
7) Els seminaris i els departaments d’àrees diferents es coordinen en relació a la geometria?
8) A l'aula, se sol treballar la geometria en grup o individualment?
9) Quina actitud tenen els alumnes i les alumnes davant de la geometria? Positiva? Negativa? Superficial? Profunda?
10) S'observen dificultats a l'hora d'imaginar situacions geomètriques?
11) Quins instruments i materials auxiliars fem servir per tal de treballar la geometria?

Exercicis i activitats proposades... segueix a la pàgina següent

✍

Exercicis i activitats proposades (ve de la pàgina anterior)

2. Proposeu als vostres alumnes de segon cicle d'ESO o de batxillerat o a un grup de persones adultes la prova de geometria (o una part de la prova) de la inspecció del 1995 (vegeu l'apartat 1.4.1. Prova de la Inspecció del 1995) o els quatre exercicis de geometria de la prova de l'INCE del 1995 (vegeu l'apartat 1.4.2. Proves de l'INCE del 1995) o els problemes de geometria de la prova de l'INCE del 2000 (vegeu l'apartat 1.4.3. Proves de l'INCE del 2000) i estudieu els resultats obtinguts.

✍

Problemes de geometria

S'afegeixen dos problemes de geometria sintètica per als lectors que vulguin posar a prova els seus coneixements de geometria clàssica. Podeu trobar les solucions a l'annex 3:

Enunciat 1 (Polya[1])

Es pot construir un quadrat "inscrit" en un triangle donat? (Un costat del quadrat ha de recolzar-se en un dels costats del triangle i els altres dos vèrtexs del quadrat han d'estar, respectivament, sobre els dos costats restants del triangle.)

Enunciat 2 (Polya)

Construïu un triangle donats un costat a, l'altura perpendicular a aquest costat h i l'angle A oposat al costat a.

([1]) Aquest dos enunciats són originals del matemàtic hongarès (emigrat als Estats Units el 1940) Georg Polya, especialista en resolució de problemes.

2. INTRODUCCIÓ AL MARC TEÒRIC DE L'ENSENYAMENT DE LA GEOMETRIA

En aquest capítol, mitjançant un seguit de cites, es fa una aproximació a l'ensenyament de la geometria a secundària. Es revisen, també, algunes aportacions destacades, els nivells Van Hiele, el constructivisme i les orientacions didàctiques associades al desplegament de la LOGSE, que poden orientar la manera de fer del professorat.

2.1. INTRODUCCIÓ

En aquest capítol es farà una ullada a algunes opinions expertes en relació a la geometria i a la seva didàctica, i s'obtindran indicacions de cara a decidir com s'han de fer les classes.

Val a dir que no es pretén un tractament sistemàtic del tema; ans al contrari, es tracta més aviat d'una pluja d'idees, algunes de les quals són contradictòries, que s'exposen i comenten amb la intenció que els lectors facin una reflexió sobre l'ensenyament de la geometria.

Des d'una perspectiva històrica, podem dir que la geometria ha estat un dels grans motors de la matemàtica. Per això mateix, no deixa de ser curiós que, com ja s'ha comentat, durant molts anys, hagués retrocedit de manera dramàtica la seva presència en els programes de secundària. Això no va passat solament a casa nostra, va ser un fenomen, o una moda, generalitzat que afortunadament sembla que es troba en total retrocés. És evident que ara caldrà fer un esforç per tal de retrobar-se amb la geometria i que, d'entrada, s'haurà de fer una reflexió teòrica que eviti els errors del passat.

2.2. CITES[1] I COMENTARIS

2.2.1. Aforismes

Per començar se citen un parell d'aforismes de Montaigne i un de Confuci, certament enginyosos i plens de vigència per al món educatiu actual, tot i que els primers tenen quatre-cents anys i que el del pensador xinès en té uns dos mil cinc-cents! Certament les bones idees poden venir de lluny:

> *"Més val un cap ben fet que ben ple."*
>
> *"El nen no és una ampolla que haguem d'omplir, sinó un foc que cal encendre."*
>
> *(Montaigne, 1533-1592)*

([1]) Les cites, extretes del seu context, poden portar a confusió. Malgrat tot, s'ha considerat que tenien prou interès intrínsec per reproduir-les sense patir pel problema de la descontextualització. En qualsevol cas, el lector haurà de tenir present el seu caràcter fragmentari.

"Si m'ho expliquen ho oblido, si ho veig m'ho crec i si ho faig ho comprenc."

(Confuci, 551 a.C.- 479 a.C.)

Pot semblar senzill estar-hi d'acord; el cert, però, és que l'obsessió per farcir els alumnes amb un munt de coneixements sovint mal apresos no ha desaparegut, ni de bon tros, ni entre molts professors, ni entre els pares, ni entre els alumnes. Només cal passejar-se pels passadissos d'alguns centres educatius, per comprovar que l'acció i el protagonisme a les aules continua, sovint, a mans dels docents i no dels discents, tal i com reclama Confuci.

A què és deguda aquesta tendència? Per què és tan difícil canviar-la? Potser les classes i les activitats de matemàtiques no es poden fer d'una altra manera?

Aquesta situació s'hauria d'atribuir a les causes següents:

a) A la pressió del contracte didàctic implícit que governa les relacions a les aules: el professorat, ple d'afany docent, en creure que una majoria d'alumnes no aprèn a pensar i a raonar, opta per solucions tradicionals i senzilles que li donen seguretat i resultats constatables a curt termini.

b) A la sensació de manca de temps: el professorat es veu afectat pel pes dels programes educatius, molt amplis i ambiciosos, i per les proves d'accés a la universitat o les revàlides, que no pot deixar de veure a l'horitzó (és un fet que les hores dedicades a les matemàtiques a l'ESO i als batxillerats són insuficients).

c) A la inèrcia: ja s'ha esmentat la tendència a reproduir els esquemes sota els quals s'ha après. Hom pot pensar: aquest sistema a nosaltres ens ha servit i no hi ha motius per pensar que no servirà amb l'alumnat actual. Des d'aquesta perspectiva, la innovació metodològica es pot presentar plena d'incògnites i d'inseguretats.

d) Al nombre excessiu d'alumnes per classe: els mètodes participatius amb un nombre elevat d'alumnes creen sensació de desordre i descontrol.

e) A la manca de recursos: no hi ha laboratoris de matemàtiques, les aules d'informàtica no donen abast i els materials solen ser escassos.

f) A la dificultat de gestionar les classes de forma participativa: la gestió d'aula de forma tradicional és senzilla; en canvi, si es vol que els alumnes participin activament, tot resulta força més complicat i incòmode per al professorat.

Les sis causes esmentades actuen sobre el professorat i també sobre l'alumnat i els seus pares. Per tot plegat cal pensar que els canvis seran lents i difícils. Malauradament, de vegades, aquestes mancances i problemes que, cal insistir-hi, són molt importants es fan servir com a coartada, per tal d'evitar la incomoditat o l'aparent descontrol de les classes més actives i participatives.

2.2.2. Els *Elements* d'Euclides

Es recullen, a continuació, un seguit de cites referents als *Elements* d'Euclides:

"Déu fa geometria d'acord amb els Elements d'Euclides." (E. Kant. 1724-1804)

"Al llarg de la meva educació secundària, em van ensenyar la geometria com una matèria separada de l'aritmètica i de l'àlgebra, a càrrec de professors diferents i sense formar part d'una assignatura íntegra anomenada matemàtiques[...] Llavors, quan jo anava a l'escola, per geometria s'entenia tot allò relatiu als teoremes d'Euclides [...] Vaig haver d'aprendre al voltant de 70 teoremes amb les seves demostracions, la meva mare, però, explica que a la seva època anaven pels 140 teoremes[...]
La realitat és que la geometria euclidiana, tal i com s'ensenyava, era una matèria molt sofisticada[...] Es desenvolupava a partir d'un reduït nombre d'axiomes deduint-ne una gran col·lecció de propietats sobre línies, triangles i cercles mitjançant un raonament exacte, era formós." (B.Bolt)

No és estrany que els *Elements* d'Euclides, elevats a la categoria divina ni més ni menys que per Kant, l'autoritat moral del qual fou extraordinària a tot Europa en els segles XVIII i XIX, hagin presidit l'ensenyament de la geometria durant tant de temps.
La cita de Brian Bolt recorda, per cert, el que havia passat a secundària a l'època del BUP i del COU: la geometria sintètica havia anat a parar a les classes de dibuix! Això sí, desproveïda del seu rigor axiomàtic.
També cal afegir, en relació a aquesta cita, que el mateix Bolt reconeix que per al 90% dels alumnes de la seva època els *Elements* d'Euclides, que ell troba tan bells, eren més aviat un martiri.

L'aparició de les geometries no euclidianes i el triomf de les matemàtiques deductives van portar molts matemàtics a pensar que era un contrasentit i un anacronisme mantenir els *Elements* d'Euclides a les escoles quan ja eren una branca pràcticament morta per a la investigació matemàtica:

"Si em demana quina és la meva idea per als programes educatius a secundària, l'hi resumiré amb tres paraules: a baix Euclides!"(Jean Dieudonné 1906-1992)

Les paraules de l'eminent matemàtic francès, membre fundador del col·lectiu Bourbaki[2], J. Dieudonné certifiquen aquest corrent. Una gran majoria de matemàtics professionals de l'època pensaven el mateix. Resulta, per tant, previsible que, atesa la seva autoritat intel·lectual, a França i també a casa nostra s'imposessin plenament. Va ser el moment de la matemàtica moderna i de la visió de la geometria i de la matemàtica en general com una creació purament abstracta. Als centres de secundària es va començar a parlar d'espais vectorials i d'espais afins, i l'algebrització de la geometria va ser pràcticament completa.

En altres llocs, com ara al Regne Unit, també van deixar de banda Euclides, però van fer un intent d'introduir la geometria a partir de les transformacions seguint, de fet, una idea de Fèlix Klein:

([2]) L'any 1934 alguns matemàtics francesos van decidir constituir un grup de treball amb l'objectiu d'aconseguir la simplificació, la formalització i la unificació de les matemàtiques. La minuciosa i monumental obra que van començar a elaborar es va titular *Éléments de mathématique*. Aquest conjunt de llibres, centrat en la concepció axiomàtica de les matemàtiques i en la noció d'estructura, va tenir una influència extraordinària que va arribar fins i tot als programes de secundària de molts països (als mitjans de comunicació es va parlar de la implantació de les matemàtiques modernes). El grup estava constituït per uns 10 o 20 matemàtics que van voler romandre a l'anonimat. Amb aquesta intenció es van inventar el pseudònim de Nicolas Bourbaki com a autor de totes les obres. Ara sabem que entre els socis fundadors hi havia un conjunt de matemàtics excepcionals: André Weil (1906-1998), Jean Delsarte (1903-1968), l'esmentat Jean Dieudonné, Claude Chevalley (1909-1984)... Després s'hi van anar afegint molts matemàtics de gran prestigi, com ara Henri Cartan, Samuel Eilenberg, Lauren Schwartz, Alexander Grothendick, Jean Pierre Serre, Roger Godement, René Thom... El primer volum dels *Éléments de mathématique* va aparèixer el 1939 i el darrer el 1998. Per tot plegat s'ha de considerar que aquest grup va marcar les matemàtiques del segle XX.

"Tot i que els grecs van treballar molt profitosament, no tan sols la geometria, sinó els més diversos camps de les matemàtiques, cal dir que, avui dia, hem avançat molt més que ells en qualsevol àrea i, certament, també en geometria." (F. Klein, 1849-1925)

"Després de discutir molt, es va decidir introduir la geometria fent ús de les transformacions: reflexions, rotacions, homotècies, transformacions afins, etc. Ens vam inspirar en una conferència de F. Klein del 1872 en la qual suggeria que la geometria s'havia d'ensenyar com els invariants dels grups de les transformacions a l'espai [...] L'experiència aviat ens va mostrar que aquest nou enfocament, tot i ser fascinant per a l'equip de professors, era tan difícil per als alumnes com el vell. Àdhuc, probablement, era més sofisticat." (B. Bolt)

En el fons, era absolutament lògic i lloable que les noves conquestes matemàtiques es volguessin portar a l'escola. Tant les propostes algebritzadores, com les que recorda Bolt, que formava part de la comissió de savis que havia de decidir quina geometria s'havia de fer a secundària, semblaven, en el seu moment, assenyades i plenes de futur.
A l'ensenyament, però, les coses no són mai tan senzilles. Amb el pas del temps, s'ha pogut comprovar que aquestes vies van ser un desastre per a una gran majoria d'alumnes. El fracàs de la implantació de les anomenades matemàtiques modernes va ser sonat: les bellíssimes matemàtiques deductives van portar a l'aparició sorprenent de generacions d'analfabets matemàtics i geomètrics.

Noves veus han sorgit demanant el retorn als *Elements*:

"El qui desdenya la geometria d'Euclides és com l'home que, en retornar de terres estranyes, menysprea la seva casa." (H.G.Forder)

"Amb una literatura molt més àmplia que la de l'àlgebra i l'aritmètica juntes, i almenys tan extensa com la de l'anàlisi, la geometria és un gran cofre de tresors amb coses molt més interessants i mig oblidades que tota una generació cuitosa no ha tingut temps de gaudir, tal com ho han fet amb qualsevol altra parcel·la de les matemàtiques." (E. T. Bell)

2.2.3. Noves perspectives

Dues cites de Brian Bolt porten a considerar la geometria sobre noves perspectives. Un amant dels *Elements* d'Euclides i un dels impulsors de la introducció de la geometria a través dels grups d'invariants ofereix les seves darreres conclusions que, certament, han de ser fruit de molta experiència i reflexió:

"A més, crec que hauríem de ser conscients que per a molts alumnes seria bo fer connexions entre les matemàtiques i el món en què viuen sempre que sigui possible." (B. Bolt)

"Un cop vaig decidir que el paper tradicional de la geometria no era sostenible, vaig començar a apreciar que el que es necessitava eren experiències, per tal que els meus alumnes incrementessin la seva consciència de l'espai i del món en què vivien." (B. Bolt)

Dues cites d'Emma Castelnuovo van en la mateixa direcció. En primer lloc, fa consideracions de caire epistemològic i, després, de caire psicològic per tal de justificar la necessitat de la geometria experimental:

“Si ens inspirem en la tesi que sosté que l’ens geomètric és una construcció de la ment humana, independent i preexistent a la consideració d’objectes reals, no té sentit, evidentment, anteposar al curs deductiu de geometria un curs de caràcter experimental, sensorial. Es comprèn, doncs, com aquells homes i aquells països, en particular França, que era impregnada de l’esperit cartesià, que sostenien la tesi racionalista, no havien pensat mai a implantar un curs de geometria intuïtiva.
Si ens basem, però, en la hipòtesi que l’ens geomètric es forma a la ment humana per abstracció, a partir d’observacions d’objectes reals i d’experiments sobre aquests objectes, haurem de fer precedir, des d’un punt de vista didàctic, el curs racional per un curs de caràcter experimental en el qual els axiomes trobin les seves arrels naturals.” (E. Castelnuovo)

“Hom es pot adonar realment que l’alumne no solament no veu la necessitat de demostrar -ja hem dit que ell considera suficient mesurar i observar-, sinó que a més, segueix amb dificultat raonaments simples de caràcter hipotètic i deductiu.” (E. Castelnuovo)

Es recull, finalment, una excel·lent cita de Howard Eves que justifica la necessitat d’ensenyar geometria experimental en l’evolució històrica de les matemàtiques:

"Les primeres consideracions geomètriques de l'home deuen ser molt antigues i es deuen haver originat subconscientment a partir de simples observacions nascudes de la capacitat humana per reconèixer la forma física i per comparar models i grandàries[...] D'aquest primer contacte nebulós amb molts conceptes geomètrics pot dir-se'n geometria subconscient.

La segona etapa en geometria va sorgir quan la intel·ligència humana fou capaç d'extraure d'un conjunt de relacions geomètriques concretes una relació general abstracta que contenia les primeres com a casos particulars[...] L'etapa de laboratori en geometria es coneix com a geometria científica (o experimental, o empírica o inductiva).

Una tercera etapa és aquella en què els resultats desitjats s'obtenen per una petita cadena de raonament deductiu, originada en un resultat més fonamental. Aquest tipus de geometria es coneix com a geometria deductiva (o demostrativa o sistemàtica)[...]

Hi ha un principi pedagògic basat en la famosa llei condensadament enunciada pels biòlegs en la forma: "L'ontogènesi recapitula la filogènesi", la qual cosa significa simplement que, en general, "l'individu repeteix el desenvolupament del grup". El principi pedagògic és que, almenys en grans línies, a un estudiant cal ensenyar-li una matèria en l'ordre en el qual la matèria es va desenvolupar a través dels anys. Prenem la geometria, per exemple. Hem vist que històricament la geometria va progressar a través de tres etapes, primer geometria subconscient, llavors geometria científica i finalment geometria demostrativa.

El principi pedagògic reclama, llavors, que la geometria sigui presentada primer als nens petits en la seva forma subconscient, probablement a través de simple treball artístic i simples observacions de la natura. D'aquesta forma, els nens petits estaran assabentats subconscientment d'un gran nombre de conceptes geomètrics, com ara distància, angle, triangle, quadrilàter, vertical, perpendicular, paral·lela, línia recta, cercle, espiral, esfera, cilindre, con, etc. Llavors, una mica més tard, aquesta base subconscient serà aconduïda cap a la geometria científica, on els alumnes induiran un conjunt considerable de fets geomètrics a través de l'experimentació amb regles i compassos, amb tisores i cola, amb models

simples, etc. Encara més tard, quan l'estudiant s'ha tornat suficientment sofisticat, la geometria es pot presentar en la seva forma demostrativa, o deductiva, i els avantatges i inconvenients del primer procés poden ser mostrats.
Avui, la part més dèbil d'aquest programa d'estudi geomètric a les nostres escoles sembla estar en la segona etapa de la geometria, la científica. No es dedica prou temps a aquesta etapa. Hi ha moltes coses a dir en la geometria empírica o experimental. El temps dedicat aquí solidifica el domini de l'estudiant de molts conceptes geomètrics. Li mostra la importància i la necessitat essencial de processos inductius preliminars en matemàtiques, i al mateix temps li ensenya les deficiències quan el treball no és seguit per demostracions rigoroses. El que els professors necessiten per fer aquesta fase d'aprenentatge geomètric més extensa i més valuosa és una bona col·lecció d'experiments geomètrics, simples però significatius, que facin servir models barats i fàcilment construïbles. El disseny d'un grup d'aquests experiments és molt recomanable per a qualsevol interessat en l'aventura." (H.Eves)

2.3. IDEES, ESTUDIS I PROPOSTES

Es proposen, a continuació, en uns quants quadres, algunes idees, estudis o propostes que poden ser d'utilitat.

2.3.1. Els nivells Van Hiele

Els "nivells Van Hiele"

L'estudi de les concepcions geomètriques en el pensament humà va portar els estudiosos Pierre Van Hiele i Dina Van Hiele-Geldof a proposar un model evolutiu de l'aprenentatge de la geometria basat en cinc nivells.

Nivell 1: visualització i reconeixement
En aquest nivell, una ment és capaç de reconèixer les figures i els objectes geomètrics més comuns a partir del nom i viceversa. Les descripcions que se'n puguin fer (de les figures) són, però, essencialment visuals i globals; no s'arriba a poder fer una anàlisi dels elements.

Nivell 2: anàlisi
En aquest nivell s'assoleix la capacitat de parar atenció als elements i a les propietats de les figures o cossos geomètrics. El concepte que es té d'un objecte geomètric pot quedar lligat així a un conjunt d'elements i de propietats. No es té, però, la capacitat de distingir quins elements o quines propietats caracteritzen de forma essencial o defineixen un objecte geomètric.

Nivell 3: ordre i deducció informal
S'arriba a tenir la capacitat de distingir les diferents classes de conceptes geomètrics. Això és possible perquè es perceben les relacions entre objectes geomètrics diferents.
Es comença a veure la necessitat de les definicions i es poden fer inferències lògiques i raonaments inductius a partir de l'observació.

Nivell 4: deducció formal
En aquest nivell s'arriba a comprendre el paper dels axiomes, de les definicions, de les proposicions i dels teoremes. Es veu la geometria de forma estructurada. Es poden fer demostracions deductives.

Nivell 5: rigor
S'assoleix una comprensió profunda del que és un sistema axiomàtic i s'està en condicions de poder comparar axiomàtiques diferents tot i entenent que hi ha moltes geometries.

La serietat i consistència de l'estudi dels Van Hiele fa absolutament necessari tenir-lo present. Així, tot i que és evident que no cal entendre aquests cinc nivells de forma rígida i estàtica, caldrà tenir en compte, tal i com recomanen els autors, que abans de passar de nivell, serà bo consolidar l'anterior.

Comptant amb el desenvolupament evolutiu i amb la diversitat de l'alumnat de 12 a 16 anys, cal pensar a moure's entre el nivell 2 i el nivell 4. Això vol dir que cal centrar-se en el nivell 3, que és el que més s'adiu amb la geometria experimental o científica per fer incursions en el nivell 4, quan sigui possible, i en el 2, quan sigui necessari.

2.3.2. Algunes preguntes que s'ha de fer el professorat

Es presenten aquí algunes preguntes extretes del document de debat preparat per la Comissió Internacional sobre la Instrucció Matemàtica (ICMI) amb el títol *Perspectives sobre l'ensenyament de la geometria al segle XXI*, aparegut en el butlletí núm. 1 de maig de 1995 de la Societat Catalana de Matemàtiques.

El document deixa clar que hi ha un acord molt ampli entre els matemàtics i els ensenyants sobre el fet que l'ensenyament de la geometria ha de començar molt aviat i ha de continuar al llarg de tot el currículum matemàtic. Tanmateix, també deixa clar que, a l'hora de concretar, sorgeixen divergències possiblement per la multiplicitat d'aspectes de la geometria i de la seva didàctica.

1. Quins són els objectius més rellevants pel que fa a l'ensenyament de la geometria?
2. En què hem de posar èmfasi quan ensenyem geometria, en la "quantitat" o en la "qualitat"?
3. És possible/recomanable identificar un currículum essencial?
4. S'ha d'ensenyar geometria com una matèria específica, separada, o bé inclosa en els continguts de l'àrea de matemàtiques?
5. De quina manera l'estudi de l'àlgebra lineal pot reforçar la comprensió de la geometria?
6. Seria possible (i recomanable) incloure també en els currículums alguns elements de geometria no euclidiana?
7. Hem de potenciar únicament un punt de vista - l'"intuïtiu" o el "formal /axiomàtic"- o hi ha d'haver un pas gradual de l'un a l'altre?
8. A partir de quin nivell escolar cal fer demostracions?
9. A quina edat s'ha de començar l'aprenentatge de la geometria analítica?
10. Com influirà l'ús dels ordinadors en l'ensenyament de la geometria?

Moltes d’aquestes preguntes poden obtenir resposta amb la fixació legislada dels programes educatius, d’altres, però, les haurem de respondre els docents.

2.3.3. La concepció constructivista de l’aprenentatge

La idea principal de la concepció constructivista de l’aprenentatge és utilitzar els problemes o les situacions-problema com a mitjà per construir conceptes.

Aquest paradigma està basat en la teoria de l'aprenentatge: teoria genètica de Piaget i teories de la psicologia social.

La teoria de l'aprenentatge comporta quatre hipòtesis bàsiques:

Acció: només s'aprèn amb l'acció.

Reequilibrament: en el desenvolupament del coneixement es passa d'un estat d'equilibri a desequilibris per arribar a un equilibri superior.

Importància dels preconceptes: sempre s'aprèn en contra d'un coneixement anterior.

Conflictes sociocognitius: cal treball en grup per tal de trencar els equilibris.

Com s'aplica tot això a les matemàtiques i a la geometria en concret?

Per construir un concepte geomètric es defineix una "**situació problema**":

a) Ha de ser una situació en la qual l'alumne pugui entrar fàcilment.

b) Els coneixements de l'alumne han de ser insuficients per resoldre-la (per arribar a destruir l'equilibri).

c) La situació-problema, per ella mateixa, sense la intervenció del professor, ha de donar una resposta a l'alumne en el sentit de si és correcte o no el que està fent (autonomia).

d) La "noció" o "concepte" que volem que l'estudiant "construeixi" ha de ser l'òptima per resoldre la situació.

Per tal de **gestionar una classe** hauríem de seguir les fases següents:

1a fase: acció
Els alumnes reben la situació-problema geomètrica individualment i després la treballen en grups de quatre o cinc.

(Segueix a la pàgina següent)

2a fase: formulació
Per escrit o oralment comuniquen els seus resultats i els posen en comú.

3a fase: validació
L'alumne, o el grup, ha de provar que el que diu és convincent (no cal una demostració matemàtica).

En aquestes tres fases el professorat no ha d'intervenir o fer-ho el mínim possible.

4a fase: institucionalització
Intervé el professor i diu quins són els coneixements que han de quedar d'aquesta sessió.

5a fase: avaluació
La noció es fa servir per fer altres exercicis i, així, afermar el concepte.

2.3.4. Les orientacions didàctiques adjuntades al desplegament de la LOGSE

Si es revisa l'anomenat primer nivell de concreció de matemàtiques a l'ESO que proposava la LOGSE, és a dir, la legislació que fixava els objectius i els continguts en l'àmbit de l'anomenada reforma educativa, es pot veure que, a diferència del que passava amb el sistema educatiu anterior, la geometria sintètica era un contingut explícit que tenia associats objectius terminals de l'àrea i objectius generals de l'etapa.

La preponderància de l'àlgebra desapareixia i la geometria analítica en dues i tres dimensions quedava pràcticament restringida als batxillerats, on, això sí, no hi havia més geometria sintètica, com a mínim, de forma explícita.

A més, la reforma educativa, en oferir un marc teòric basat en una concepció constructivista de l'aprenentatge, també marcava, com a mínim en part, què s'havia de fer per ensenyar geometria. Això es fa evident si es repassen les anomenades orientacions didàctiques, que, tot i formar part del primer nivell de concreció, no es recollien en els decrets. Resumidament eren aquestes:

Per tal d'aconseguir un aprenentatge significatiu de la geometria:

1) Caldrà tenir molt presents les idees i els coneixements previs que l'alumnat en tingui.

2) Cal que l'alumnat intenti trobar les lleis i les idees pels seus propis mitjans.

3) Cal que l'alumnat expliqui oralment i per escrit les estratègies que ha fet servir i les idees que ha trobat.

(Segueix a la pàgina següent)

4) Les situacions que es plantegin a l’alumnat han de ser com més diverses millor amb l'objectiu que els aprenentatges siguin funcionals.

5) Cal no tenir excessiva pressa i no pretendre assolir els objectius a la primera.

6) Cal afavorir situacions d'intercanvi entre tot l'alumnat, de manera que s'expliquin entre ells les estratègies i les solucions que han obtingut.

7) La geometria no s'ha de limitar a ser un estudi d'algorismes per al càlcul d'algunes distàncies, superfícies i volums.

8) Per aconseguir una millor motivació, s'hauran d'afavorir les situacions de caràcter experimental i manipulatiu. Caldrà usar, a ser possible, models físics concrets i donar prioritat a la inducció sobre la deducció. Cal, doncs, prioritzar la geometria experimental, de manera que l’alumnat dibuixi, construeixi i manipuli figures geomètriques planes i espacials.

9) Cal afavorir l'aprenentatge de les capacitats referides a l'orientació espacial i a la lectura i interpretació de plànols.

10) Cal donar prioritat a la geometria de l'espai sobre la del pla.

11) Cal que l’alumnat faci servir instruments de dibuix i mesura sobre objectes reals i sobre representacions a escala.

Certament, si aquestes orientacions didàctiques se segueixen al peu de la lletra, fixen en bona part la forma d’ensenyar. De fet, però, es tracta només d’orientacions i, com en molts aspectes de la docència, si hom no les creu, si no n’està convençut i no les fa seves, no serveixen de gaire. Tothom sap que allò que es fa de cara als alumnes sense estar-ne massa convençut, no té, en general, gens d’èxit.

Pel que fa a l’organització i la temporització dels temaris, amb la implantació de la LOCE els centres educatius tenen només un marge relatiu d’autonomia i el 2n nivell de concreció està essencialment determinat.
A més, una gran majoria de centres deleguen la resolució d’aquest problema, com a mínim inicialment, en les editorials que ja presenten un 2n nivell estructurat. També sol ser freqüent, però, que amb el pas del temps i amb l’experiència docent, es vagin introduint modificacions o permutacions en l’ordre proposat, de manera que, tot i mantenir els llibres de l’editorial, se’n fa un ús molt diferent del proposat pels autors o autores.

Tanmateix, tot i les observacions anteriors, potser val la pena tenir en compte els factors següents a l’hora d’estudiar la distribució i el desenvolupament concret de les programacions:

1) Etapa anterior i etapa posterior.

2) Les altres àrees.

3) El desenvolupament evolutiu dels alumnes.

4) La coherència lògica i la progressió (del més simple al més complex i del més general al més concret).

5) L'equilibri dels continguts.

6) La necessitat de no compartimentar en excés i de fer un tractament helicoïdal.

7) La correlació amb els objectius terminals.

8) Les conviccions del professorat.

9) Els condicionaments de l'entorn.

10) Les disponibilitats materials del centre educatiu.

Cada grup de professors haurà de trobar la seva solució.

2.4. ALGUNES CONCLUSIONS

Certament, cadascú ha de treure les seves pròpies conclusions. Aquí se'n proposen algunes de caire més aviat ampli, que no deixen de ser, però, opinables com gairebé tot en l'ensenyament:

1) Cal ensenyar geometria al llarg de tota la secundària.

2) L'opció de començar per la geometria deductiva a secundària ha quedat descartada pràcticament arreu del món.

3) Els *Elements* d'Euclides no han de formar part explícita dels programes educatius tot i que poden proporcionar contextos i idees per tal de treballar la geometria.

4) La geometria de coordenades que els alumnes han de fer en els batxillerats "funcionarà" millor si abans han fet un treball considerable de geometria inductiva o experimental.

5) El rigor i les demostracions han d'aparèixer de forma progressiva i no tenen sentit fins que la maduració intel·lectiva de l'alumnat els permet entendre-les.

6) Tot i que el càlcul d'àrees i volums és important, no cal centrar la geometria en aquests àmbits.

7) Els continguts conceptuals per ells mateixos són molt menys importants que els procediments que els alumnes i les alumnes hauran de fer servir per estudiar-los, sobretot a l'ESO.

8) Els nous materials didàctics faciliten les activitats d'aprenentatge de la geometria. Es poden fer servir de forma eventual o, fins i tot, de forma sistemàtica. Cal exigir un treball rigorós i no aturar-se en la fase de manipulació.

✍

Exercicis i activitats proposades

Des d'una perspectiva sintètica, hi ha tres opcions pedagògiques teòriques generals:

1) La recepció pura i simple.
2) El descobriment induït.
3) El descobriment personal i autònom.

Evidentment, aquestes opcions mai no es donen en estat pur. És ben cert, però, que els docents tenen tendència a emmarcar-se en una de manera conscient o no.
Per quina us decantaríeu de cara a ensenyar geometria? Quins avantatges i inconvenients hi veieu?

✍

Problemes de geometria

S’afegeixen dos nous problemes de geometria sintètica. Com en el capítol anterior, els enunciats són de G. Polya. També podreu trobar les solucions a l’annex 3:

Enunciat 3 (Polya)

Construïu un triangle donats un angle α (relatiu al vèrtex A), l'altura h corresponent al vèrtex A i el seu perímetre p.

Enunciat 4 (Polya)

Dibuixeu un triangle i les circumferències inscrita i circumscrita. Siguin r i R els seus radis respectius i sigui H la més gran de les altures del triangle. És cert que $r+R \leq H$? Investigueu-ho.

3. NOTES SOBRE L'ENSENYAMENT DE LA GEOMETRIA PLANA

En aquest capítol es revisa l'ensenyament de la geometria plana des d'una perspectiva essencialment pràctica. A la introducció es remarquen els objectius didàctics de primària i de secundària obligatòria. A continuació, es comenten els materials didàctics per al treball de la geometria plana. Es conclou amb dos exemples de treball a l'aula, desenvolupats i comentats.

3.1. INTRODUCCIÓ

A l'hora d'ensenyar geometria, alguns experts solen recomanar que es comenci per la geometria de l'espai, per anar després a la geometria plana.

A secundària obligatòria es presenta, doncs, el dilema d'afrontar primer la geometria de tres dimensions i passar després a la de dues dimensions, seguint aquestes recomanacions, o bé fer-ho a l'inrevés seguint, més aviat, la tradició.

Cal tenir en compte, en aquest sentit, que a primària, l'alumnat ja haurà tingut un contacte amb la geometria de l'espai que hauria de permetre al professorat de secundària, començar per la geometria plana. El debat, però, resta obert.

Centrant-se en la geometria plana, cal pensar que la majoria de l'alumnat que arribi a secundaria hauria de complir els requisits següents:

Pel que fa als continguts:

i) estar acostumat a
- observar i reconèixer atributs geomètrics;
- ordenar i classificar objectes geomètrics;
- utilitzar el llenguatge geomètric;
- resoldre problemes geomètrics senzills.

ii) conèixer
- els conceptes de longitud, superfície i capacitat;
- el concepte de grau sexagesimal;
- les figures geomètriques planes i de l'espai més habituals;
- els elements d'aquestes figures i les relacions entre elles.

Pel que fa als objectius terminals:

- saber usar instruments de mesura, regla, transportador, etc., i aplicar-los a problemes reals;
- saber obtenir figures equivalents en perímetre o en àrea a figures donades;
- expressar verbalment i gràficament aspectes de la realitat: formes, grandàries, situació, posició, moviment, distàncies, mitjançant el llenguatge geomètric;

- saber distingir i construir models de figures lineals i planes, i trobar les seves relacions geomètriques i els elements que en possibiliten alguna classificació;
- saber emprar les transformacions geomètriques del pla: simetria, translacions i girs per crear noves figures;
- saber comparar i classificar figures geomètriques per diversos criteris;
- apreciar la pulcritud en una representació gràfica i en una construcció geomètrica.

Partint d'aquesta base, el professorat d'ESO hauria d'aconseguir que, en finalitzar l'etapa, la majoria de l'alumnat fos capaç, sense sortir de l'àmbit de la geometria plana, de:

1. Identificar figures planes: cercles, polígons i sectors circulars, construir-ne models a partir de criteris donats i descriure'n els elements i les relacions entre ells.

2. Definir conceptes geomètrics elementals: incidència, paral·lelisme, perpendicularitat, angles, etc., incorporar-los a la seva expressió i al seu raonament, i enunciar relacions entre ells i propietats senzilles.

3. Saber interpretar representacions planes.

4. Reconèixer figures semblants i equivalents en àrea.

5. Utilitzar correctament aparells de dibuix i mesura: regle, transportador, escaire, compàs, programes informàtics, per fer construccions geomètriques planes.

6. Interpretar representacions a escala.

7. Enunciar i aplicar els teoremes de Tales i de Pitàgores.

Certament, potser massa sovint la realitat s'allunya, entossudida, de les desitjades pretensions i els docents s'han d'adaptar a allò que tenen.

Cal tenir en compte també, en relació al primer nivell de concreció, que l'àrea de dibuix, a diferència del que passava amb els plans d'estudi anteriors a la implantació de la LOGSE, té molts menys continguts de geometria i que, per tant, és l'àrea de matemàtiques la que té especial responsabilitat en aquest àmbit temàtic.

Finalment, fem notar que, per a pràcticament tots els objectius generals i per a molts dels objectius terminals de l'àrea, la geometria en general és un context idoni perquè l'alumnat adquireixi apteses matemàtiques.

3.2. MATERIALS PER AL TREBALL DE LA GEOMETRIA PLANA A L'ESO

Ja s'ha esmentat la importància de la geometria experimental o científica en aquesta etapa. Els materials són, des d'aquesta perspectiva, molt importants.

L'ús de materials variats a l'hora de fer geometria plana ajudarà a rompre la possible monotonia de les classes i obligarà l'alumnat a cercar relacions en situacions diferents.

Els materials idonis han de tenir certes característiques. Segons afirma Emma Castelnuovo, han de ser materials manipulables que permetin fer construccions i que siguin movibles i operatius.

Textualment diu:

> *"[...] Els materials per a l'ensenyament constructiu de la geometria han de ser artificials i transformables per continuïtat. Aquestes dues característiques suggeriran una àmplia gamma de "models" aptes per facilitar el pas d'allò que és concret a allò que és abstracte."*

C. Alsina, C. Burgués i J. Fortuny assenyalen, molt encertadament, els errors següents, entre d'altres, en l'ús de materials:

1) Sofisticació excessiva del material.

Un material massa complex pot desvirtuar l'objectiu d'aprenentatge.

2) Intocabilitat del material.

Els materials s'han de poder manipular; l'alumnat ha de poder experimentar-hi.

3) Poca quantitat de material.

Si no hi ha materials per a tothom molts alumnes poden desconnectar o mantenir un comportament excessivament passiu.

A continuació es dóna una relació dels materials[1] més assequibles:

1. Regle i compàs

- Materials tradicionals, l'ús dels quals s'ha d'incrementar a les classes de matemàtiques, ja que a l'àrea de visual i plàstica es fan servir menys que abans a les assignatures de dibuix.
- Els programes informàtics no haurien de desplaçar l'ús d'aquests materials.
- Són útils per a tota la geometria plana.

2. Altres instruments de dibuix: escaire i cartabó, transportador d'angles, bisector d'angles i pantògraf

- Els primers que s'esmenten són molt útils per a tota la geometria plana; els dos últims, força més específics, resulten més complicats d'usar.
- Caldria, en qualsevol cas, col·laborar amb les àrees de tecnologia i de visual i plàstica de cara a usar-los.

([1]) Hi ha molts més materials i cada cop amb més freqüència, afortunadament, en surten de nous. El llistat no és, doncs, exhaustiu i es pot consultar la bibliografia per tal d'obtenir més informació. Són especialment interessants: Alsina, C.; Burgués, C. i Fortuny, J. M.: *Materiales para construir la geometria* (Col·lecció Cultura y aprendizaje núm.12). Editorial Síntesis. Madrid, 1990. // Bolt, B. i Hobbs, D.: *101 proyectos matemáticos.* Editorial Labor. Barcelona, 1991. // Castelnuovo, E.: *La Geometria.* Ketres. Barcelona , 1981.

3. El programa informàtic Cabri-Géomètre

- Aquest programa és el que s'anomena un *entorn geomètric dinàmic* i el principi bàsic del seu disseny és permetre la construcció de figures geomètriques a partir dels anomenats objectes bàsics, com ara punts, rectes, segments, circumferències, etc., i d'un seguit de relacions, com ara punt mitjà, paral·lela, perpendicular, simetria, gir, etc. que l'usuari selecciona des d'un menú. Quan s'ha construït una figura, es poden moure els objectes bàsics i observar a la pantalla les modificacions. Cada element del dibuix es mou de forma contínua i es mantenen les característiques geomètriques de la construcció feta. L'usuari treballa, doncs, amb tota una categoria de dibuixos cadascun dels quals és un cas particular de la construcció que s'ha fet. Això permet observar experimentalment quines propietats són invariants i quines no ho són.

- El programa servirà per a tot el que sigui geometria plana, però també per donar representacions planes de l'espai. De fet, fa essencialment tot allò que es pot fer amb regle i compàs. Té, a més, l'atractiu, la nitidesa i les facilitats que proporciona el suport informàtic i, com s'ha dit, l'avantatge de poder sotmetre a moviments els objectes geomètrics del pla.

- Vegeu l'annex 1 per tenir-ne més informació.

4. El geoplà

- Material més específic que els anteriors. Més interessant si s'usa amb gomes elàstiques de colors.

- Consisteix en un quadrat de fusta en el qual es claven, no totalment, n x n claus.

- És fàcil i econòmic de construir.

- S'hi poden treballar classificacions de figures planes, nomenclatures, equivalència d'àrees, semblança, angles, etc.

5. Els tàngrams

- Materials molt específics.

- Relativament econòmics i fàcils de construir si cal.

- Suggerents per a l'alumnat com a trencaclosques.

- S'hi poden treballar: figures planes, descomposicions, angles, àrees, moviments, etc.

6. Creator

- Molt suggerent per a l'alumnat.

- Amb aquest material es poden treballar: polígons regulars, triangulacions, teorema d'Euler al pla, desenvolupaments plans, etc.

- Més interessant per a l'espai que per al pla.

7. Mecano

- Interessant per a la construcció de polígons amb vèrtexs "flexibles".

- Útil sobretot per al treball de triangles i quadrilàters i les seves classificacions.

8. Cartolines

- S'inclouen aquí tots els materials que es puguin fer retallant cartolines: col·leccions de triangles, de quadrilàters, tires que serveixin com a costats, etc.

- Interessant per al treball de polígons en general.

No s'ha d'oblidar, però, que la realitat i els seus objectes, la mateixa aula, fins i tot, també poden servir com a base per a la geometria experimental.

3.3. EXEMPLES DESENVOLUPATS

A continuació, s'exposen alguns exemples d'activitats a l'aula, experimentats personalment a 3r o 4t d'ESO. Certament se'n podrien fer readaptacions per a primer cicle.

No es deixaran els amplis espais entre els apartats de l'activitat que sí que tindrien els alumnes en els seus fulls de treball. A cada exemple es donen:

1. El material dels alumnes, que inclou:

    activitats per fer a l'aula en grup, individualment o col·lectivament;

    activitats per al treball a casa.

2. El material del professor, que inclou:

    un comentari general;

    una referència als continguts;

    comentaris als apartats;

    comentaris per a la feina a casa.

3.3.1. Exemple 1: POLÍGONS

Aquest exemple consta de tres activitats que poden fer-se de forma consecutiva:

ACTIVITAT 1: ANGLES I POLÍGONS

ACTIVITAT 2: PASSEM COMPTES AMB ELS POLÍGONS

ACTIVITAT 3: INSCRIPCIÓ DE POLÍGONS REGULARS

En total poden fer-se dedicant-hi unes set o vuit sessions de classe. Alguns apartats es poden suprimir i d'altres es poden ampliar.

MATERIAL DELS ALUMNES

ACTIVITAT 1: ANGLES I POLÍGONS

Activitat a desenvolupar en grups de treball o individualment . Materials necessaris: transportador d'angles, escaire i cartabó.

0. En aquesta activitat es tracta de trobar una relació entre el nombre de costats d'un polígon i la suma dels seus angles interiors.

1. Dibuixeu un triangle acutangle i un triangle obtusangle.
Mesureu-ne els angles amb el transportador i sumeu-los. Què observeu?

2. Dibuixeu un triangle escalè qualsevol a les vostres llibretes.
Anomeneu amb les lletres *A*, *B* i *C* els seus angles i mesureu-los.
Traceu una paral·lela al costat *AB* que passi per *C* fent ús de l'escaire i el cartabó. En el vèrtex *C* apareixen nous angles. Mesureu-los. Extraieu-ne conclusions.

3. Recolliu en un quadre les conclusions dels apartats 1 i 2.

4. Si la suma dels angles de qualsevol triangle val sempre 180º, sembla lògic preguntar-se si passarà el mateix o alguna cosa similar amb els quadrilàters.
Dibuixeu un quadrilàter qualsevol. Quant val la suma dels seus angles? Podeu donar una justificació general d'aquest fet?

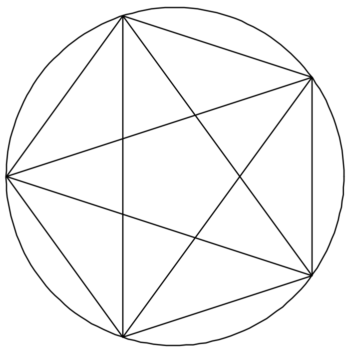
5. Dibuixeu un pentàgon convex qualsevol i un pentàgon còncau qualsevol (per cert, hi ha algun quadrilàter còncau?) Com podem descompondre aquests polígons? Quant valdrà la suma dels seus angles?

6. Feu el mateix amb hexàgons, heptàgons i octàgons.

7. Deduïu una llei general que permeti calcular la suma dels angles d'un polígon de *n* costats.

FEINA A CASA PER A L'ACTIVITAT 1

Observeu la figura següent:



Quins tipus de polígons hi veieu? Quins són regulars?

Anomeneu i mesureu els diferents angles que apareixen a la figura.

És possible trobar tots els angles anteriors sense haver de mesurar? Quines deduccions heu de fer?

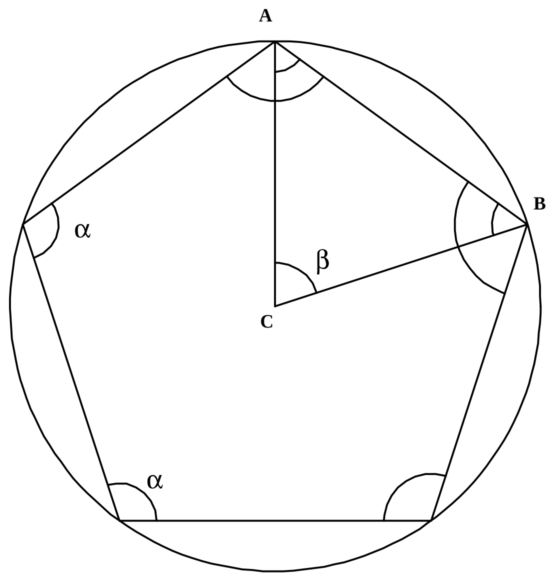
ACTIVITAT 2: PASSEM COMPTES AMB ELS POLÍGONS

Activitat a desenvolupar en grups de treball o individualment. Materials necessaris: transportador d'angles, regle, escaire i cartabó.

0. A l'activitat anterior, heu vist com podeu esbrinar la suma de tots els angles interiors d'un polígon qualsevol quan en coneixeu el nombre de costats. A l'activitat que ara mateix comenceu, haureu d'aprofitar aquest resultat per calcular els angles interiors i centrals dels polígons regulars.
D'altra banda, també es proposa que intenteu comptar quantes diagonals tenen els polígons.

1. Vegeu l'exemple següent:

a) Observeu el pentàgon regular de la figura:



Es coneix la suma de tots els seus ***angles interiors*** (com ara α) i es pot afirmar, doncs, que:

$5\alpha = 540^{\circ}$ (per què 540º?)

Per tant, l'angle interior del pentàgon regular val: $\alpha = 540^{\circ} / 5 = 108^{\circ}$

També es podria arribar a la mateixa conclusió a través del seu ***angle central*** β (l'angle β es calcula fàcilment dividint 360º per 5) i del triangle *ABC* (com aniria això exactament?).

b) Recompte de les diagonals d'un pentàgon:

L'estrella de cinc puntes interior (dibuixeu-la) està composta per les **cinc** diagonals del pentàgon.

2. Si el pentàgon no fos regular quin sentit tindrien els apartats anteriors? I si fos còncau?

3. Ompliu la taula següent:

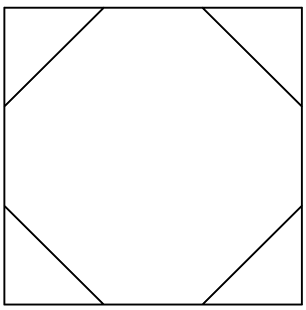
NOM DEL POLÍGON	NOMBRE DE COSTATS	SUMA DELS ANGLES INTERIORS	NOMBRE DE DIAGONALS	ANGLE INTERIOR SI ÉS REGULAR	ANGLE CENTRAL SI ÉS REGULAR
TRIANGLE					
QUADRILÀTER					
PENTÀGON	5	540º	5	108º	72º
HEXÀGON					
HEPTÀGON					
OCTÀGON					
ENNEÀGON					
DECÀGON					
....					
....					
....					
....					
N - GON					

4. Com es pot deduir la fórmula que dóna el nombre de diagonals en funció del nombre de costats? Expliqueu-ho detingudament.

FEINA A CASA PER A L'ACTIVITAT 2

EXERCICI 1

Observeu la figura següent:



Quins polígons veieu en aquesta figura?

Quantes diagonals tenen?

Quins d'aquests polígons són regulars? Per què? Podeu mesurar els angles i els costats si és necessari.

EXERCICI 2: TEOREMA DE RAMSEY

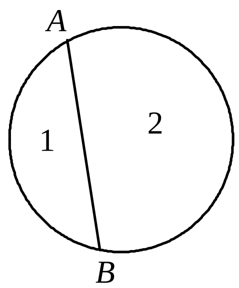
Dibuixeu sis punts qualssevol sobre una circumferència. Agafeu un llapis vermell i un llapis blau, i traceu els segments que uneixen els sis punts de dos en dos, alternant, com vulgueu, els dos colors.

a) Podeu dir quants segments d'aquests hi haurà sense comptar-los? Per què?

b) Haureu observat que us ha sortit un triangle, o potser més d'un, que té els tres costats del mateix color. Això no és casual. Ho feu com ho feu, sempre serà així, sempre hi haurà, com a mínim, un triangle en aquestes condicions. Podríeu justificar-ho?

EXERCICI 3

Agafem dos punts *A* i *B* sobre una circumferència i els unim. Ens preguntem en quantes regions queda dividit el cercle:



En aquest cas tot és prou clar i senzill: el cercle queda dividit en dues regions.

Feu el mateix agafant 3 punts sobre la circumferència. Quantes regions surten ara?

Feu el mateix agafant 4 punts sobre la circumferència. Quantes regions surten ara?

Feu el mateix agafant 5 punts sobre la circumferència. Quantes regions surten ara?

Feu el mateix agafant 6 punts sobre la circumferència. Quantes regions surten ara?

Quines conclusions podeu treure d'aquest exercici?

ACTIVITAT 3 : INSCRIPCIÓ DE POLÍGONS

Activitat a desenvolupar en grups de dos alumnes.
Materials necessaris: ordinador i programa Cabri-Géomètre, regle i compàs, escaire i cartabó.

1. Es vol fer un logotip en el qual hi hagi un cercle vermell que té inscrit un hexàgon verd. Feu un croquis del logotip.

2. Es vol fer el dibuix del logotip de forma precisa fent ús del programa Cabri-Géomètre:

   i) Creeu una circumferència.

   ii) Com podeu inscriure-hi de manera exacta l'hexàgon inscrit?

3. Us encarreguen també un logotip que consisteix en un triangle equilàter inscrit en una circumferència. Feu-ne el croquis.

4. Feu el dibuix del triangle inscrit en la circumferència de manera precisa amb regle i compàs o amb el programa Cabri-Géomètre. Ajudeu-vos amb el dibuix fet a l'apartat 2.

5. Podríeu fer servir els apartats anteriors per inscriure un polígon regular de dotze costats en una circumferència? Per cert, quin nom li poseu a aquest polígon?

6. En els apartats anteriors heu vist com es poden inscriure triangles equilàters, hexàgons i dodecàgons en una circumferència.
Es podrà inscriure qualsevol polígon en una circumferència de manera exacta fent ús del regle i del compàs o del programa Cabri? Què us en sembla?

7. Proveu d'inscriure un quadrat en una circumferència fent ús del regle i del compàs o del programa Cabri. Ajudeu-vos, si cal, amb un croquis.

8. Aprofiteu la feina feta a l'apartat anterior per tal d'aconseguir l'octàgon regular inscrit.

9. Amb el pentàgon les coses s'emboliquen. Es pot provar d'aclarir-ho una mica.

9.1. Feu un croquis amb un pentàgon regular inscrit en una circumferència.

9.2. Feu un dibuix més precís usant el transportador d'angles. Recordeu com podeu esbrinar quins són els angles centrals i interiors del pentàgon regular?

9.3. El dibuix exacte amb regle i compàs o amb Cabri del pentàgon inscrit en una circumferència no és pas senzill. Seguiu aquestes instruccions per fer-lo:

Creeu una circumferència i el seu centre *O*.

Traceu un diàmetre d'extrems *A* i *B*.

Traceu la mediatriu del diàmetre *AB*. Tallarà la circumferència en els punts *P* i *P*'.

Determineu el punt mitjà del radi *AO* i anomeneu-lo *M*.

Traceu la circumferència de centre *M* i radi *MP* o *MP*'.

Sobre el diàmetre *AB* la circumferència anterior determina un punt *S*.

Aleshores el costat del pentàgon inscrit és precisament el segment *PS* (i el costat del decàgon inscrit és el segment *OS*).

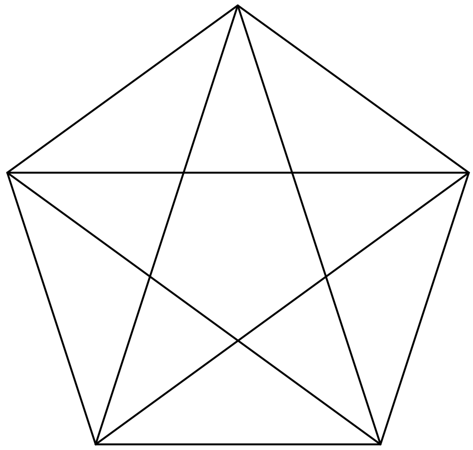
Ara podeu completar el pentàgon inscrit, i el decàgon també.

10. Traceu les circumferències inscrites en els polígons dels apartats anteriors.

11. LECTURA 1

Els pitagòrics

Aquesta construcció que acabeu de veure a l'apartat anterior és patrimoni de la humanitat des de l'antigor. Pitàgores, nat a Samos, Grècia l'any 572 a. C., famós avui pel teorema que porta el seu nom (per cert, ja sabeu què diu el teorema de Pitàgores?), ja coneixia aquesta construcció, que el fascinava. Segons sembla, Pitàgores va viure, de jove, a Egipte, on va recollir força coneixements de tipus geomètric i matemàtic. Al cap de vint anys va tornar a Samos, però no va poder suportar el govern tirànic de Polícrates i es va traslladar a les colònies gregues del sud d'Itàlia, concretament a Crotona, on va reunir un nombrós grup de deixebles i va fundar, l'any 540 a.C., l'escola pitagòrica. El símbol de l'escola estava basat en el pentàgon regular: era l'estrella regular de cinc puntes que s'obté en traçar les diagonals del pentàgon.



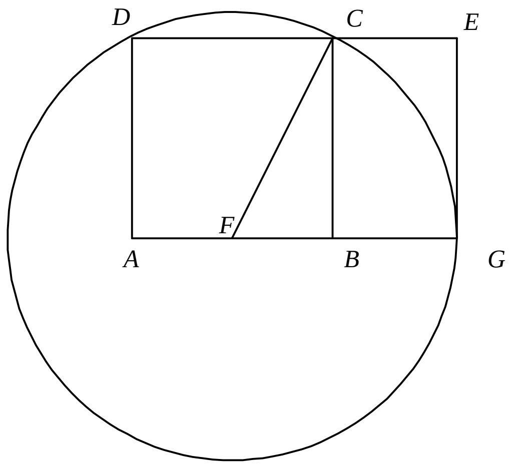
No era fàcil entrar a la comunitat pitagòrica: calia superar, primer, un rígid ensenyament de caire moral i religiós que comprenia àmplies nocions de matemàtiques i de música. Els qui havien superat aquests ensenyaments passaven a considerar-se "pitagòrics" i això era tingut per gran honor. Entre ells ho compartien tot i havien de renunciar a les seves pertinences individuals.

Després de la mort de Pitàgores, l'any 500 a.C., l'escola pitagòrica de Crotona no va durar gaire ja que va ser assaltada per un grup rival de la ciutat de Síbaris i molts dels seus dirigents van ser assassinats. Els altres van fugir i es van dispersar per tot el món grec, i això va permetre que els coneixements de Pitàgores i els seus seguidors es divulguessin àmpliament.

El nombre d'or

En la construcció del pentàgon i del decàgon inscrits apareix també un element digne de menció històrica: la proporció existent entre el radi de la circumferència i el costat del decàgon inscrit és l'anomenat nombre d'or.

Aquí teniu la construcció, força similar a la feta per tal d'inscriure el pentàgon, de l'anomenat rectangle d'or, que segons els grecs de l'antiguitat és el rectangle més harmoniós que existeix: partim del quadrat *ABCD*, a continuació prenem el punt mitjà *F* del segment *AB* i tracem la circumferència de centre *F* i radi *FC*; aquesta circumferència talla la recta que passa pel costat *AB* del quadrat en el punt *G* i ja tenim el rectangle d'or *AGED*.



En aquest rectangle es compleixen les relacions:

$$AB = AG\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

i, equivalentment:

$$AG = AB\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$

Comproveu-ho.

El nombre $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ és l'anomenat nombre d'or, que obtindreu també, tal i com hem dit abans, si dividiu la longitud del costat del decàgon per la longitud del radi de la circumferència circumscrita.

La façana del Partenó de l'acròpolis d'Atenes i la de molts altres temples respon a aquestes proporcions. En el Renaixement, a Europa, aquest nombre tornaria a adquirir una gran importància entre els pintors, els escultors, els arquitectes i els matemàtics. Això va ser degut, sobretot, a la publicació del llibre *Divina proportione* (La proporció divina) que versa sobre aquest nombre harmoniós i que va ser escrit pel matemàtic italià Luca Paccioli i il·lustrat per Leonardo da Vinci.

12. Ja sabeu inscriure triangles equilàters, hexàgons i dodecàgons; quadrats, octàgons i hexadecàgons; pentàgons i decàgons. Heu reeixit, doncs, amb polígons de 3,6,12,... i 4,8,16,... i 5,10,... costats. Us queda la família que comença amb el 7: què passa amb l'heptàgon? Repetiu les passes de l'apartat 9:

12.1. Feu un croquis amb un heptàgon regular inscrit en una circumferència.

12.2. Feu un dibuix més precís usant el transportador d'angles. Recordeu com podeu esbrinar quins són els angles centrals i interiors de l'heptàgon regular?

12.3. Per més que us hi esforceu amb el transportador no podreu fer un dibuix exacte.

El dibuix exacte amb regle i compàs o amb Cabri de l'heptàgon inscrit en una circumferència no és que sigui difícil, és impossible de fer! No ha estat gens fàcil d'arribar a aquesta conclusió. Vegeu-ho a la lectura de l'apartat 13.
Abans, vegeu un altre mètode de construcció aproximada que es pot fer amb regle i compàs o amb Cabri:

Creeu una circumferència. Determineu un punt *A* sobre la circumferència.

Traceu el diàmetre que passa pel punt *A*. Anomeneu *B* el seu altre extrem.

Dividiu aquest diàmetre en 7 parts iguals fent ús del teorema de Tales.

Trobeu el punt *M* que forma un triangle equilàter amb *A* i *B*.

Anomeneu *t* la recta que uneix el punt *M* amb la segona divisió del diàmetre *AB*.

Si talleu *t* amb la circumferència obtindreu el costat de l'heptàgon inscrit aproximat.

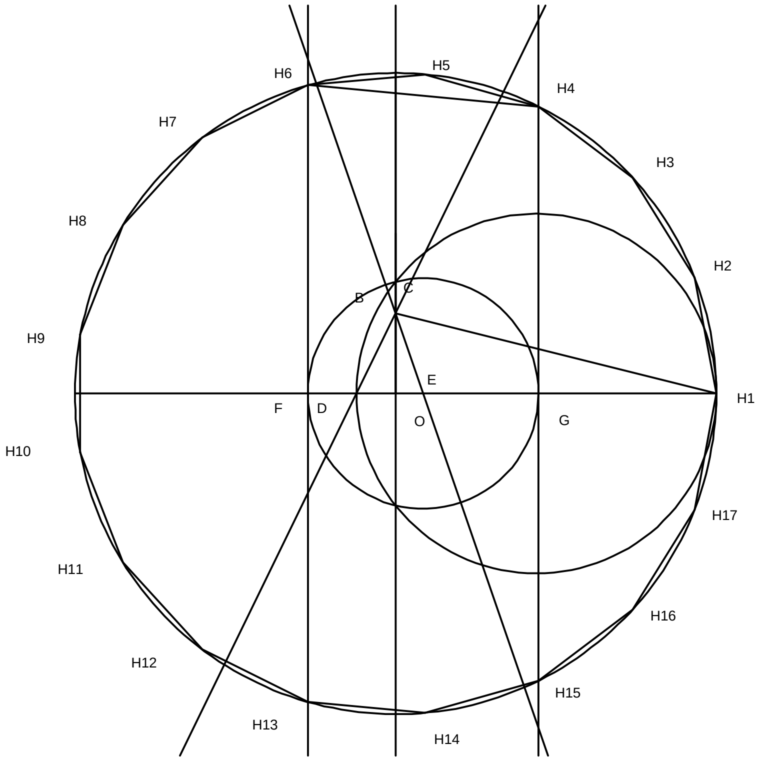
13. LECTURA 2

La història de la inscripció dels polígons regulars

Les columnes dels temples grecs tenen un seguit d'estries iguals. Els arquitectes grecs ho aconseguien dividint la circumferència en parts iguals o, el que és el mateix, inscrivint-hi polígons regulars.
No és estrany, doncs, que es fessin la pregunta de quins polígons regulars es podien inscriure en una circumferència, com sempre amb regle i compàs. Van reeixir amb el triangle equilàter, amb el quadrat, amb el pentàgon, amb l'hexàgon, amb l'octàgon, amb el decàgon i amb els polígons regulars de 12, 15 i 16 costats, però no els va ser possible fer-ho amb l'heptàgon regular, ni amb els polígons de 9, 11, 13 i 17 costats.

Aquests problemes van resistir 2000 anys fins que, al començament del segle XIX, el matemàtic alemany Karl Friedrich Gauss (1777-1855) va trobar-ne la solució. De nen, Gauss, va ser d'una precocitat extraordinària i, més d'una vegada, va deixar bocabadats els seus mestres. De gran se'l coneixia com "princeps matemathicorum" (el príncep de les matemàtiques). Va fer contribucions de la màxima importància en àrees molt diverses de les matemàtiques.

El seu primer gran descobriment, tot just quan tenia 18 anys, va ser un mètode per construir el polígon regular de 17 costats que, tal i com hem dit, havia resistit tots els intents des de l'any 500 a.C. Precisament aquest èxit el va decidir a ser matemàtic i no filòleg, la seva altra gran vocació. Quan va morir, els seus deixebles li van erigir a Göttingen, la seva ciutat natal, una estàtua en el pedestal de la qual hi van posar un polígon regular de 17 costats. Aquesta és la construcció del jove Gauss:



Déu n'hi do el jove Gauss, no?

Amb això, però, encara no en va tenir prou i uns anys més tard, Gauss va demostrar que només es poden inscriure amb regle i compàs els polígons el nombre de costats dels quals es descompon en factors primers que siguin dos o nombres del tipus:

$$p = 2^{2^n} + 1$$

Aquests nombres no són necessàriament primers: per a $n = 5$ surt 4.294.967.297 que és divisible per 641. Fermat va conjecturar que tots podrien ser primers, però Euler va trobar el contraexemple que hem donat.

Així, per exemple, s’obté:

per a $n = 0$, $p = 3$
per a $n = 1$, $p = 5$
per a $n = 2$, $p = 17$
per a $n = 3$, $p = 257$
....

El 7 no és, doncs, un nombre d'aquesta forma i l'heptàgon no és inscriptible, com tampoc ho són els polígons regulars de 9, 11, 13, 19, 21, 23,... costats. Gauss va donar, fins i tot, la llista dels 38 valors enters per sota de 300 que permeten la inscripció: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96, 102, 120, 128, 136, 160, 170, 192, 204, 240, 255, 256, 257 i 272.

MATERIAL DEL PROFESSOR

A continuació, s'exposen els comentaris per al professorat referits a aquestes tres activitats. Cal entendre-ho tot amb certa dosi de flexibilitat, perquè l'alumnat pot ser molt diferent.
Com a observació general, cal dir que el fet de tenir les activitats seqüenciades pas a pas dóna molta autonomia al professorat, que pot atendre millor la diversitat de ritmes d'aprenentatge. No s'ha de pretendre que tot l'alumnat arribi sempre al mateix lloc. Alguns alumnes podran fer més apartats que d'altres. A més, és convenient fer posades en comú de tant en tant.

COMENTARIS PER A L'ACTIVITAT 1

DURADA PREVISTA: 1 HORA

1. Introducció

Es parteix del supòsit que l'alumnat coneix la nomenclatura relativa als triangles, als polígons i als seus elements. No és necessari que la dominin. De fet, l'activitat proporciona un context per poder-la treballar de manera significativa.

L'activitat es pot fer també amb Cabri-Géomètre, si es considera convenient.

L'activitat està pensada per desenvolupar-la en grups de treball. Pot admetre també, però, un tractament individual.

2. Què es treballa amb aquesta activitat?

1. Nomenclatura i classificació de triangles i de polígons i dels elements que els componen.
2. Distinció entre polígon còncau i polígon convex.
3. Mesura d'angles amb transportadors.
4. Descomposició de figures en triangles.
5. Inducció empírica de regularitats.

3. Comentaris als apartats

Apartats 1, 2 i 3

La conclusió òbvia a la qual han d'arribar els alumnes i les alumnes és que la suma dels angles d'un triangle qualsevol és igual a 180º, és a dir, un angle pla.

Pot ser interessant també aturar-se en les mesures que hauran fet i en l'error que hagin pogut cometre.

L'apartat *2* no pretén pas ser una demostració. Tan sols ha de permetre afegir "plausibilitat" a la conclusió.

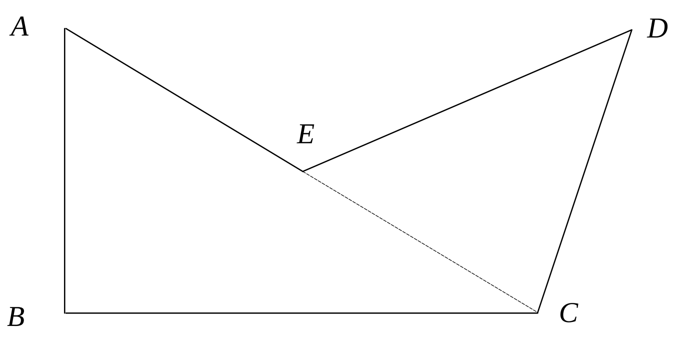
Apartat 4

En aquest apartat cal demanar-los més autonomia. En primer lloc, cal parar atenció a allò que l'alumnat entén per un quadrilàter qualsevol, no fos cas que dibuixessin rectangles, quadrats, etc.

En principi, ells mateixos poden optar per fer la mesura dels quatre angles amb transportador o per intuir o veure que poden descompondre el quadrilàter en dos triangles. Si no fos així caldrà suggerir-los-ho.

Apartat 5 i 6

Aquí cal treballar també la distinció entre còncau i convex. Caldrà anar amb compte amb la possibilitat que surtin dibuixos i raonaments d'aquest tipus (vegeu la figura): "aquest pentàgon es descompon només en dos triangles: *ABC* i *CDE*. Per tant, els seus angles sumen 2x180º = 360º ".



Si no hi ha cap alumne que faci aquest raonament, pot ser bo presentar-lo perquè hi trobin l'errada.

Apartat 7

L’ús de lletres per designar nombres no és gens senzill i part de l’alumnat no ho acaba de veure clar. Caldrà anar amb compte i fer-los veure que la fórmula que conjecturen ha de ser vàlida per a qualsevol polígon, és a dir, per a un polígon d’*n* costats.

4. Comentaris per a la feina a casa

En funció de la disponibilitat de temps, cal considerar les activitats de feina a casa com a optatives. Alguns alumnes podran començar-les a classe i acabar-les a casa. Estan pensades perquè serveixin d'introducció a les activitats posteriors.

Les parts inicials són senzilles i poden ser assolides per la gran majoria de l'alumnat. Les altres parts s'haurien de reservar a l'alumnat més avançat.

COMENTARIS PER A L'ACTIVITAT 2

DURADA PREVISTA: 1 HORA (2 HORES SI ES FAN LES ACTIVITATS COMPLEMENTÀRIES)

1. Introducció

En principi, l'activitat està pensada per desenvolupar-la en grups de treball, però es pot fer individualment sense cap problema.
Pel que fa a la diversitat, cal insistir novament que no tots els alumnes arribaran a resoldre tots els apartats.

2. Què es treballa amb aquesta activitat?

1. Nomenclatura i classificació dels polígons i dels elements que els componen i els caracteritzen.
2. Distinció entre polígon còncau i polígon convex.
3. Distinció entre polígon regular i polígon irregular.
4. Mesura d'angles amb transportadors.
5. Descomposició de figures en triangles.
6. Inducció empírica de regularitats.
7. Tècniques de recompte.

3. Comentaris als apartats

Apartat 1

S’ha proposat l'exemple del pentàgon, ja que s'ha introduït en la feina a casa de l'activitat anterior. Pot ser que alguns alumnes tinguin la situació resolta o, com a mínim, estudiada i que ajudin en el desenvolupament de l'explicació. Simultàniament es pot comentar el que calgui sobre la feina a casa que hagin fet.

Apartat 2

Aquest apartat presentarà dificultats per a alguns alumnes. Hauran de concloure que la qüestió dels angles perd tot el sentit per als polígons no regulars, però que la de les diagonals no. En els polígons còncaus caldrà debatre el sentit de les diagonals exteriors.

Apartat 3

A l'hora d'ampliar la taula caldrà que l’alumnat treballi sobre dibuixos o croquis i amb exemples de polígons regulars, no regulars, còncaus i convexos.

Apartat 4

La deducció intuïtiva de la fórmula que permet el càlcul dels angles central i interior d'un *n-gon* regular no ha d'oferir gaire dificultat. En canvi, la relativa a la fórmula que dóna el nombre de diagonals requerirà probablement ajudes del professorat, que poden ser successives i progressives (cal donar-les només si cal):

Quantes diagonals surten de cada vèrtex?

Quants vèrtexs es tenen?

Quantes diagonals es compten així?

Quants cops es compta cada diagonal?

Quines conclusions traieu?

Funciona la fórmula que heu trobat amb els exemples estudiats?

No cal, en cap cas, que l’alumnat faci raonaments molt rigorosos sinó raonaments de "convicció".
Un grup significatiu d’alumnes, tot i que no serà capaç de conjecturar una fórmula correcta, sí que trobarà la llei numèrica que permet generar la successió que dóna el nombre de diagonals: veuran que, en afegir un vèrtex, cal sumar una diagonal més.

S’observa també, que els alumnes i les alumnes que troben la llei experimenten una gran satisfacció. Caldrà fer-los veure que en aquells moments estan fent de vertaders matemàtics.

4. Comentaris per a la feina a casa

Tal i com dèiem a l'activitat anterior cal considerar aquestes activitats com a optatives.

L'exercici *1* és senzill i ha d'estar a l'abast de la gran majoria de l'alumnat.

Els exercicis *2* i *3* són prou interessants i, si hi ha temps, val la pena fer-los a classe.

El teorema de Ramsey no té interès des del punt de vista dels continguts, però és molt interessant pel que fa als raonaments que requereix. L'ús de l'anomenat principi del colomar o de Dirichlet aclareix força la situació. Es pot dir als alumnes: "considereu els 5 segments que surten des d'un dels punts; en acolorir-los, per força 2 seran blaus i 3 vermells o viceversa; destrieu tots els casos a partir d'aquí..."

L'exercici sobre la "regió perduda" és interessant per tal que l'alumnat vegi que una conjectura aparentment clara pot deixar de ser-ho de cop i volta. Obtindran els resultats següents en els seus recomptes:

2 punts: 2 regions = 2^1
3 punts: 4 regions = 2^2
4 punts: 8 regions = 2^3
5 punts: 16 regions = 2^4
6 punts: 31 regions, mentre que 32 = 2^5

El resultat que resol el problema queda fora de les possibilitats de l'alumnat de secundària obligatòria. En realitat el nombre de regions que s'obtenen amb *n* punts és:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}$$

que coincideix amb 2^n si $n<6$.

COMENTARIS PER A L'ACTIVITAT 3

DURADA PREVISTA: 3 o 4 HORES

1. Introducció

Tota l'activitat es pot fer dibuixant amb regle i compàs o emprant el programa Cabri-Géomètre. Sembla més atractiva la possibilitat de combinar ambdós instruments i així es proposa.

Es parteix del supòsit que l'alumnat ha tingut algun contacte amb el programa informàtic esmentat. Si no fos així tampoc no hi hauria problema, però caldria, òbviament, donar una mica més de temps a l'activitat. No sembla necessari dedicar gaire temps al programa en si, més aviat caldria pensar a anar aclarint els problemes que surtin sobre la marxa; a més, el programa compta amb ajudes senzilles que poden consultar els alumnes i estalviar feina al professorat. El que sí que caldria és tenir pocs alumnes per ordinador.

2. Què es treballa amb aquesta activitat?

1. Nomenclatura i classificació dels polígons.
2. Distinció entre polígon inscrit i polígon circumscrit.
3. Mesura d'angles amb transportadors.
4. Realització i construcció de dibuixos de forma esquemàtica, aproximada i exacta, i distinció de la utilitat de cadascuna d'aquestes modalitats.
5. Inducció empírica de regularitats.
6. Construcció de figures amb regle i compàs i amb programes informàtics.
7. Ús de la mediatriu d'un segment.
8. Història de les matemàtiques.

3. Comentaris als apartats

Apartats 1 a 5

L'elaboració de croquis i de dibuixos ràpids i informals és molt necessària per a l'alumnat i per això es demana en iniciar cada bloc d'apartats. Cal que els alumnes vegin que els croquis han de contenir la informació essencial encara que no siguin precisos.

S'ha optat per començar per l'hexàgon, perquè és el més senzill d'inscriure. Si no se'n surten autònomament caldrà demanar que pensin en els angles i que els posin sobre els seus croquis, per tal que concloguin que els 6 triangles en què es descompon l'hexàgon regular a partir del centre són equilàters, i que el costat del polígon és, en conseqüència, igual al radi de la circumferència circumscrita.

El pas al triangle equilàter (apartat *4*) i al dodecàgon (apartat *5*) és, aleshores, senzill.

La idea dels logotips pretén contextualitzar els problemes proposats.

Apartat 6

Aquest apartat pretén que l'alumnat faci una reflexió prèvia intuïtiva que després s'haurà de contrastar amb les conclusions posteriors.

Apartats 7 i 8

Les ajudes necessàries si no se'n surten són:

i) traceu un diàmetre;

ii) traceu la mediatriu del diàmetre anterior.

Apartat 9

El croquis del subapartat *9.1* ja no els serà tan senzill, tot i que hauran vist uns quants pentàgons regulars en les activitats anteriors.

El dibuix aproximat amb el transportador d'angles té l'interès de retrobar els angles dels polígons. Pot ser que no acabin de veure clar que aquest dibuix no és exacte i caldrà aclarir-ho.

El dibuix amb regle i compàs o amb Cabri s'ha de fer inevitablement de forma guiada, però no deixa de tenir interès.

Apartat 10

Amb aquest apartat els alumnes distingiran entre circumferència inscrita i circumferència circumscrita. Si no veuen com han de trobar el radi, caldrà donar la pista següent: "traceu la mediatriu d'un dels costats".

Apartat 11

Aquesta primera lectura, tot i partint de la idea del pentàgon i del decàgon inscrits, fa una aproximació informal als pitagòrics i al nombre d'or.

Pot ser molt interessant que l'alumnat faci construccions de rectangles d'or amb regle i compàs o amb Cabri. També ho pot ser que, sobre fotografies de temples, per exemple del Partenó, esbrinin l'aparició o no d'aquests rectangles.

Sembla preferible fer la lectura com a activitat col·lectiva.

Apartat 12

Aquest apartat té la mateixa estructuració que el *9* amb la diferència que no poden arribar a la construcció exacta. Serà bo que debatin quina de les dues aproximacions -la que hauran fet amb transportador i la que hauran fet amb regle i compàs- és més bona.

Val la pena que el professor esmenti que el mètode exposat a *12.3* és vàlid per a qualsevol polígon, fins i tot es pot proposar, com a exercici, que el provin amb l'hendecàgon.

El subapartat *12.3*, tot i que és força interessant, es pot ometre sense problemes, si no es té prou temps.

Apartat 13

Amb aquesta segona lectura es pretén cloure l'activitat des d'una perspectiva històrica i global.

L'heptadecàgon construït es dóna com a curiositat i no sembla recomanable explicitar-ne la construcció, que resulta massa complexa.

Els nombres de Fermat, que surten al final, poden tractar-se amb una mica més de profunditat, si es té temps.

4. Possibles activitats complementàries o de feina a casa

Com a possibles activitats complementàries, força interessants, cal incloure les següents:

1. Construcció d'estrelles poligonals a partir dels polígons inscrits.

2. Construcció dels polígons regulars conegut el costat.

3.3.2. Exemple 2: TRIANGLES

Aquest exemple, molt més breu que l'anterior, consta de dues activitats que poden fer-se de forma consecutiva:

ACTIVITAT 1: ALTURES I TRIANGLE ÒRTIC

ACTIVITAT 2: BARICENTRE

En total poden fer-se en unes dues o tres sessions de classe. També en aquest cas, alguns apartats es poden suprimir i d'altres es poden ampliar.

MATERIAL DELS ALUMNES

ACTIVITAT 1: ALTURES I TRIANGLE ÒRTIC

Activitat a desenvolupar en grups de dos alumnes.
Materials necessaris: ordinador i programa Cabri-Géomètre, regle i compàs, escaire i cartabó.

1. Construïu un triangle acutangle qualsevol *ABC*.

2. Traceu les rectes perpendiculars a cada costat pel vèrtex oposat. Com s'anomenen aquestes rectes? Quina propietat compleixen?

3. Distingiu i anomeneu els segments que són altures. Determineu, aproximadament, l'àrea del triangle amidant les tres altures i les tres bases, i compareu els resultats.

4. Traceu paral·leles a cada costat pel vèrtex oposat. Obtindreu un nou triangle *A'B'C'*. Quina relació hi ha entre els dos triangles? (Pista: mesureu-ne angles.)

5. Quines són les mediatrius del nou triangle? Quin és el seu circumcentre?
Dibuixeu la circumferència que passa per *A'*, *B'* i *C'*.

6. Uniu els peus de les altures del triangle *ABC*. Obtindreu el triangle "òrtic".
Quina relació tenen les altures del triangle *ABC* amb el triangle òrtic?
Traceu la circumferència inscrita en el triangle òrtic.

7. Feu el mateix amb un triangle obtusangle i amb un triangle rectangle. Què observeu?

ACTIVITAT 2: BARICENTRE

1. Dibuixeu un triangle escalè qualsevol *ABC*.

2. Dibuixeu i anomeneu els punts mitjans de cada costat: *A'*, *B'* i *C'*.

3. Uniu cada vèrtex amb el punt mitjà del costat oposat. Què observeu?

4. Traceu paral·leles a cada costat pels punts mitjans dels altres costats. Què observeu?

5. Quina relació mantenen els triangles *ABC* i *A'B'C'* ?

6. Determineu els punts mitjans dels segments *AG* i *CG* i anomeneu-los *P* i *Q*. Com són els segments *AC* i *PQ*? Per què?

7. Quina relació hi ha entre els segments *PQ* i *AC*? Què és la figura *PQA'C'*?

8. On es tallen les diagonals d'un paral·lelogram? Apliqueu-ho a *PQA'C'* i deduïu *GA'* = (1/3) *AA'*. Quines són les relacions anàlogues?

MATERIAL DEL PROFESSOR

A continuació s'exposen els comentaris per al professor referits a aquestes dues activitats. Com en el cas de les tres activitats anteriors, cal entendre-ho tot amb flexibilitat perquè l'alumnat pot ser molt divers.
Com a observació general, cal dir que aquestes dues activitats són, fins a cert punt, una mica més complexes que les exposades abans.
Novament els continguts explícits s'han d'entendre com a context, o com a pretext per al treball geomètric.

COMENTARIS PER A L'ACTIVITAT 4

DURACIÓ PREVISTA: 1 HORA

1. Introducció

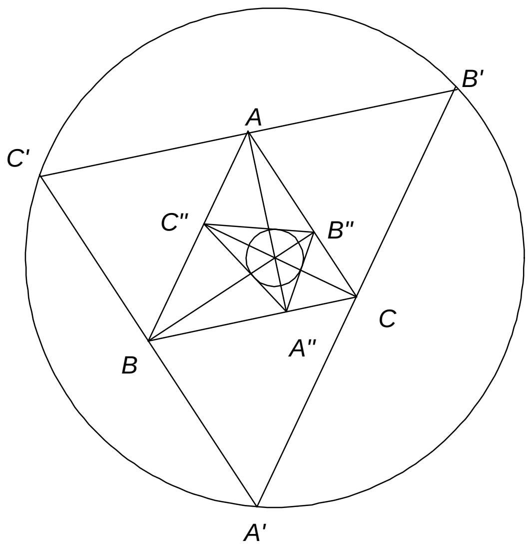
En principi, l'activitat està pensada per desenvolupar-la individualment, però es pot fer sense cap problema en grups de treball.

És preferible fer l'activitat amb el programa Cabri-Géomètre que permetrà "moure" els triangles i observar què passa.

Com sempre, no s'ha de pensar que tots els alumnes han d'arribar a resoldre cada apartat autònomament.

Abans de fer aquesta activitat s'entén que l'alumnat ja ha fet un treball previ amb triangles i que en coneix els elements fonamentals.

El dibuix corresponent és el següent:



2. Què es treballa amb aquesta activitat?

1. Perpendicularitat i paral·lelisme.
2. Altures d'un triangle. Ortocentre. Àrea d'un triangle.
3. Semblança de triangles. Teorema de Tales.
4. Mediatrius i bisectrius. Circumcentre i incentre.

3. Comentaris als apartats

Apartat 1

Convé que el triangle acutangle que facin no els surti amb alguna regularitat o particularitat no desitjada, com ara que sigui isòsceles o rectangle.

Si s'està treballant amb Cabri -i aquest és un nou avantatge del treball informàtic-, es podran fer modificacions sense problemes. Si s'està dibuixant, caldrà refer el dibuix.

Apartat 2

Alguns alumnes tenen dificultats a l'hora de seguir instruccions escrites. Treballar aquesta habilitat, que consisteix a saber interpretar instruccions escrites, els serà d'utilitat. Malgrat tot, de vegades, serà inevitable donar-los un cop de mà.

Els resulta més complicat traçar les altures si ho fan amb paper i llapis que si ho fan amb el programa, que treballa tot sol, fins a cert punt. De tota manera, les altures que realment els costa de traçar són les dels triangles obtusangles (apartat *7*).

Apartat 3

Cal aclarir la confusió entre altura com a recta i altura com a segment, i també magnitud.

De cara al càlcul aproximat demanat, que es fa amb regle o amb la utilitat del menú del Cabri, serà bo comparar resultats entre diversos alumnes.

Apartat 4

Novament poden tenir dificultats de comprensió de les instruccions.
De cara a aconseguir que "vegin" que els dos triangle són semblants es pot donar, si cal, i per a aquells alumnes que no se'n surtin, la pista consistent a mesurar els angles.

Apartat 5

En principi no els ha de costar gaire constatar que les mediatrius del nou triangle són les altures del triangle inicial. De tota manera, molts alumnes no se'n surten a causa de la complexitat del dibuix. Si es treballa amb Cabri, caldrà anar deixant només els segments i eliminar -amb la instrucció "ocultar/mostrar"- les rectes que els suporten.

Apartat 6

El dibuix queda més aviat atapeït i la constatació que les altures del triangle original són a la vegada les bisectrius del triangle òrtic no serà senzilla.

Quan hagin de traçar la circumferència inscrita en el triangle òrtic, tindran la dificultat de trobar-ne el radi. L'alumnat no en serà conscient i ho farà a ull. Si s'està treballant amb Cabri, una bona ampliació de la figura els pot fer veure que la "seva" circumferència inscrita no és bona. Si s'està treballant amb regle i compàs la situació no és tan interessant.

Apartat 7

Aquest apartat es pot proposar com a feina a casa i, en qualsevol cas, atès el seu caràcter exploratori, s'hauria de reservar als alumnes avançats.

COMENTARIS PER A L'ACTIVITAT 5

DURACIÓ PREVISTA: 1 HORA

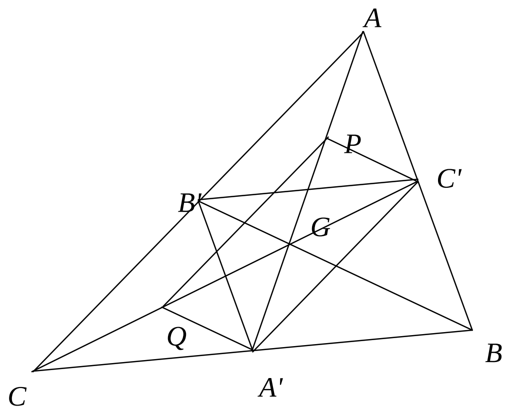
1. Introducció

En principi, aquesta activitat també està pensada per desenvolupar-la individualment, però es pot fer sense cap problema en grups de treball.

Com en el cas de l'activitat anterior, és preferible fer l'activitat amb el programa Cabri-Géomètre que permetrà "moure" els triangles i observar què passa.

Una vegada més cal pensar que no tots els alumnes arribaran a resoldre cada apartat autònomament.

Heus aquí el dibuix corresponent:



2. Què es treballa amb aquesta activitat?

1. Paral·lelisme.
2. Paral·lelograms.
3. Semblança de triangles. Teorema de Tales.
4. Mitjanes i baricentre.

3. Comentaris als apartats

Apartat 1

Com l'activitat anterior, convé que el triangle que facin no els surti amb alguna regularitat o particularitat no desitjada, com ara que sigui isòsceles, o rectangle.

Apartat 2

Pot ser bo exigir que facin ús de la mediatriu per tal de trobar els punts mitjans. Si es treballa amb Cabri, es pot modificar el menú prèviament i eliminar l'opció punt mitjà d'un segment.

Apartat 3

El fet que les tres mitjanes -el nom l'ha de donar el professor- es tallin en un punt, que el professor "bateja" com a baricentre, potser no sorprendrà els alumnes; aleshores, caldrà fer-los pensar que tres rectes no tenen perquè tallar-se en un punt únic.

Apartats 4 i 5

Anàlogament a allò que es deia a l'activitat *4*, de cara a aconseguir que "vegin" que els dos triangles són semblants es pot donar, si cal, i per a aquells alumnes que no se'n surtin, la pista consistent a mesurar els angles.

En principi, els alumnes no tindran dificultat a trobar la raó de semblança. Pot ser interessant demanar-los quina serà la raó de les àrees.

Apartats 6,7 i 8

El dibuix es complica i alguns alumnes es perden. En qualsevol cas, no s'ha de pretendre que siguin massa rigorosos en les seves observacions.

✍

Exercicis i activitats proposades

Organitzeu una seqüència d'activitats anàlogues a les exposades en aquest capítol per tractar la classificació dels triangles i dels quadrilàters.

✍

Problemes de geometria

S'afegeixen dos nous problemes de geometria sintètica. Com en els capítols anteriors, podreu trobar les solucions a l'annex 3:

Enunciat 5

Trobeu l'única terna pitagòrica els nombres de la qual estan en progressió aritmètica.

Enunciat 6 (teorema de Varignon[1])

Considereu un quadrilàter qualsevol i uniu-ne els punts mitjans dels costats. Demostreu que sempre s'obté un paral·lelogram d'àrea meitat que la del quadrilàter.

([1]) No deixa de sorprendre que un resultat tan simple i elegant passés desapercebut als excel·lents geòmetres grecs i que fos Pierre Varignon (1654-1722), deixeble francès de Leibniz i professor de matemàtiques a París, el seu descobridor.

4. NOTES SOBRE L'ENSENYAMENT DE LA GEOMETRIA DE L'ESPAI

En aquest capítol es tracta l'ensenyament de la geometria espacial des d'una perspectiva essencialment pràctica. A la introducció, es remarquen els objectius didàctics de primària i de secundària obligatòria. A continuació, es comenten els materials didàctics per al treball de la geometria de l'espai. S'inclou, també, un apartat dedicat al treball amb conjectures. S'acaba amb dos exemples de treball a l'aula, desenvolupats i comentats.

4.1. INTRODUCCIÓ

Des de fa força anys, la geometria de l'espai ha quedat especialment abandonada a secundària. Tradicionalment, s'ha considerat que comportava massa dificultats i que era millor deixar-la per a etapes posteriors. Això ha tingut com a conseqüència que gran part de l'alumnat no hagi desenvolupat la seva imaginació espacial de forma correcta. Val a dir que, a causa de la versió algebraica que es donava de la geometria, la geometria de l'espai resultava efectivament més complexa que la geometria plana.

En canvi, si no es pensa a fer geometria des d'una perspectiva algebraica i, encara més, si es pensa a fer geometria experimental, l'espai de tres dimensions -que és el real, allò que es coneix a través dels sentits- ha de ser un camp idoni per al treball geomètric a secundària.

En principi, i centrant-se en la geometria de l'espai, cal pensar que la majoria de l'alumnat que accedeixi a secundària hauria de complir els requisits següents:

Pel que fa a continguts:

i) estar acostumat/da a
- observar i reconèixer atributs geomètrics;
- ordenar i classificar objectes geomètrics;
- utilitzar el llenguatge geomètric;
- resoldre problemes geomètrics senzills.

ii) conèixer
- els conceptes de longitud, superfície i capacitat;
- les figures geomètriques de l'espai més habituals;
- els elements d'aquestes figures i les relacions entre elles.

Pel que fa als objectius terminals:

- expressar verbalment i gràficament aspectes espacials de la realitat (formes, grandàries, situació, posició, moviment, distàncies) mitjançant el llenguatge geomètric;
- saber distingir i construir models de figures espacials i trobar les seves relacions geomètriques i els elements que en possibiliten alguna classificació;

- saber comparar i classificar figures geomètriques per diversos criteris;
- apreciar la pulcritud en una representació gràfica i en una construcció geomètrica.

Partint d'aquesta base, el professorat d'ESO hauria d'aconseguir que, en finalitzar l'etapa, la majoria de l'alumnat fos capaç de (sense sortir de l'àmbit de la geometria de l'espai):

1. Identificar figures espacials (prismes, piràmides, cilindres, cons, esferes i políedres regulars), construir-ne models a partir de criteris donats i descriure'n els elements i les relacions entre ells.

2. Definir conceptes geomètrics elementals (incidència, paral·lelisme, perpendicularitat, angles, etc.), incorporar-los a la seva expressió i al seu raonament, i enunciar relacions entre ells i propietats senzilles.

3. Obtenir i utilitzar representacions planes de cossos geomètrics (prismes, piràmides, cilindres, cons, esferes i políedres regulars) i també, donada una representació plana, saber-la interpretar.

4. Reconèixer figures equivalents en volum.

5. Interpretar representacions a escala.

4.2. MATERIALS PER AL TREBALL DE LA GEOMETRIA ESPACIAL

A l'apartat 3.2. del capítol anterior, ja s'han esmentat els principis i les idees que fan tan importants els materials per al treball de la geometria. Totes les idees que s'hi exposaven són, evidentment, igual de vàlides per a la geometria de l'espai.

És recomanable fer un ús variat dels materials de cara a obtenir-ne un coneixement funcional. A més, d'aquesta manera, es podrà captar l'atenció de l'alumnat de forma més satisfactòria; potser els que no se sentin atrets per alguns exemples sí que se sentiran atrets per altres objectes o situacions.

En qualsevol cas, és clar que es pot fer geometria experimental de manera clara i directa com en pocs camps de les matemàtiques.

És evident, també, que el treball experimental a partir de materials farà avançar de manera lenta. Val a dir, però, que s'avançarà profitosament i que, en aquest nivell educatiu, no cal deixar-se portar per la pressa.

Finalment, cal tenir ben clar que fer geometria no vol dir anar directament, i potser únicament, a calcular algunes àrees i volums. A la geometria hi ha en joc moltes altres qüestions i és un camp excel·lent per al desenvolupament d'apteses força diverses.

A continuació, es dóna una relació de materials assequibles:

1. Creator

- Es tracta d'un material amb excel·lents possibilitats consistent en unes peces de plàstic en forma de triangles equilàters, quadrats, pentàgons i hexàgons que es poden connectar entre elles. En els exemples que es donen a continuació es pot veure alguna d'aquestes possibilitats.

- N'existeix una versió més precisa i amb més possibilitats, anomenada Polydron, que resulta, però, molt més cara perquè és d'importació.

- Potser l'únic que es pot trobar a faltar a l'hora d'usar aquest material és que no presenti altres peces que no siguin triangles equilàters, quadrats, pentàgons i hexàgons.

- El material és àgil, resistent i molt bo per al treball amb políedres regulars, arquimedians i irregulars.

2. Models de cossos geomètrics construïts

- Es tracta de materials més tradicionals que ofereixen menys possibilitats de participació als alumnes.

- No deixen, però, de tenir cert interès de cara a visualitzar, mostrar i treballar físicament amb cossos geomètrics.

- En tot cas caldria pensar a fer-ne un ús actiu.

3. Policubs

- Conjunts de cubs de diversos colors.

- El treball amb cubs pot tenir força interès tot i que resulta molt més específic.

- Des del punt de vista del desplegament estricte del currículum, per tant, pot resultar difícil d'utilitzar.

4. Geoespai

- Puig Adam va proposar la utilització i la creació d'un geoespai anàleg al geoplà per al treball de la geometria de l'espai.

- Es tractaria d'un cub gran, obert, amb claus a les parets convenientment disposats. El seu ús pot ser força interessant.

- Es pot pensar a construir també un cub de filferro que permeti lligar cordes a les arestes.

5. Objectes i situacions de la realitat

A la realitat s'hi troben multitud de materials o situacions per al treball de la geometria de l'espai. Alguns són:

- L'espai de l'aula, que en general és un ortòedre, pot oferir bones possibilitats si s'hi afegeixen cintes que ens puguin servir de "rectes".

- Els edificis, en general, també poden oferir un camp d'exemples d'interès.

- Tot tipus de capses, tubs i envasos comercials, que solen portar inscrita la capacitat.

- Els minerals i els seus cristalls.

- Les pilotes de tota mena. Lles pilotes de futbol, per exemple, s'obtenen cosint pentàgons i hexàgons, amb la qual cosa s'aconsegueix un políedre arquimedià.

- Els materials de construcció.

- Les tendes de campanya, les monedes, els marcs, etc.

6. Materials per a la construcció de políedres de Nathan

- Consisteix en un seguit de tiges i nusos de plàstic que permeten construir amb facilitat tot tipus de políedres, i especialment els regulars, els arquimedians i algunes estrelles.

- És més àgil i consistent, però anàleg, que el de les canyes de refresc i els neteja-pipes, que resulten potser massa efímeres. Té l'inconvenient de ser car i, fins a cert punt, fràgil.

- Presenta l'avantatge d'aconseguir figures "transparents" que permeten l'accés al seu interior.

4.3. EL TREBALL AMB CONJECTURES

Tot i que aquest apartat es podria haver inclòs en els primers capítols, o en el de geometria plana, s'ha preferit tractar-lo aquí, perquè hi ha, a continuació, un exemple de treball amb conjectures que il·lustrarà les idees de caire teòric.

4.3.1. Introducció

Segons els especialistes en didàctica de les matemàtiques Chevallard, Bosch i Gascón, el paper passiu de l'alumnat a les aules i la seva desmotivació no s'hauria de relacionar amb causes externes a l'activitat dins l'aula. En el seu llibre *Estudiar matemáticas* (1997) diuen:

> *"Molts dels comportaments habituals de l'alumne de matemàtiques (desinterès, manca d'iniciativa pròpia, avorriment, rebuig) que solen descriure's com a "actitud dolenta" o "manca de motivació" s'haurien de considerar una conseqüència, i no pas com la causa, de no haver "entrat" en la disciplina matemàtica."*

> *“Per tal d’incidir de manera significativa i universal sobre les dificultats matemàtiques dels alumnes, és necessari (tot i que, amb absoluta seguretat, no suficient) modificar els aspectes de les matemàtiques escolars que “amaguen” als alumnes la vertadera disciplina matemàtica.”*

Caldria, doncs, plantejar-se fer amb els alumnes “vertaderes matemàtiques”. Els mètodes clàssics de treball a l’aula semblen massa rutinaris i són probablement poc engrescadors. Ara bé, què vol dir vertaderes matemàtiques?

D'una manera molt sintètica, es podria dir que el mètode científic consisteix a inferir lleis o regularitats a partir de les dades observades. Ningú no posa en dubte que les ciències experimentals procedeixen essencialment així. En canvi, i pel que fa a les matemàtiques, sobretot en les darreres dècades, no sembla haver-hi unanimitat. Fins i tot, es pot dir que la matemàtica deductiva va gaudir durant la segona meitat del segle XX de molt més prestigi, fins a crear la falsa idea que els raonaments inductius no són propis d'aquesta disciplina.

Ara mateix, a secundària, a l'àrea de matemàtiques no se sol treballar de manera assídua el raonament inductiu. En part com a conseqüència d'aquesta herència, però també per inèrcia i perquè fer-ho és difícil i lent.

El marc teòric de la LOGSE, de base constructivista, proposava canviar aquesta tendència i donar prioritat a la inducció sobre la deducció, a secundària.

Això no és nou. Cal dir que G. Polya afirmava que la matemàtica, i els matemàtics, ha procedit sempre o quasi sempre de forma inductiva, com a mínim en una primera instància. Segons ell, la matemàtica també es fa intuint. És el que anomenava raonament "plausible". Les deduccions i la formalització són passos que vénen després, quan ja s’ha inferit alguna regularitat o alguna llei. Ell creu que és essencial practicar el raonament "plausible". Aquestes idees de Polya tenen encara plena vigència i la secundària i l'àmbit de la geometria són idonis per iniciar l’alumnat en aquest camp.

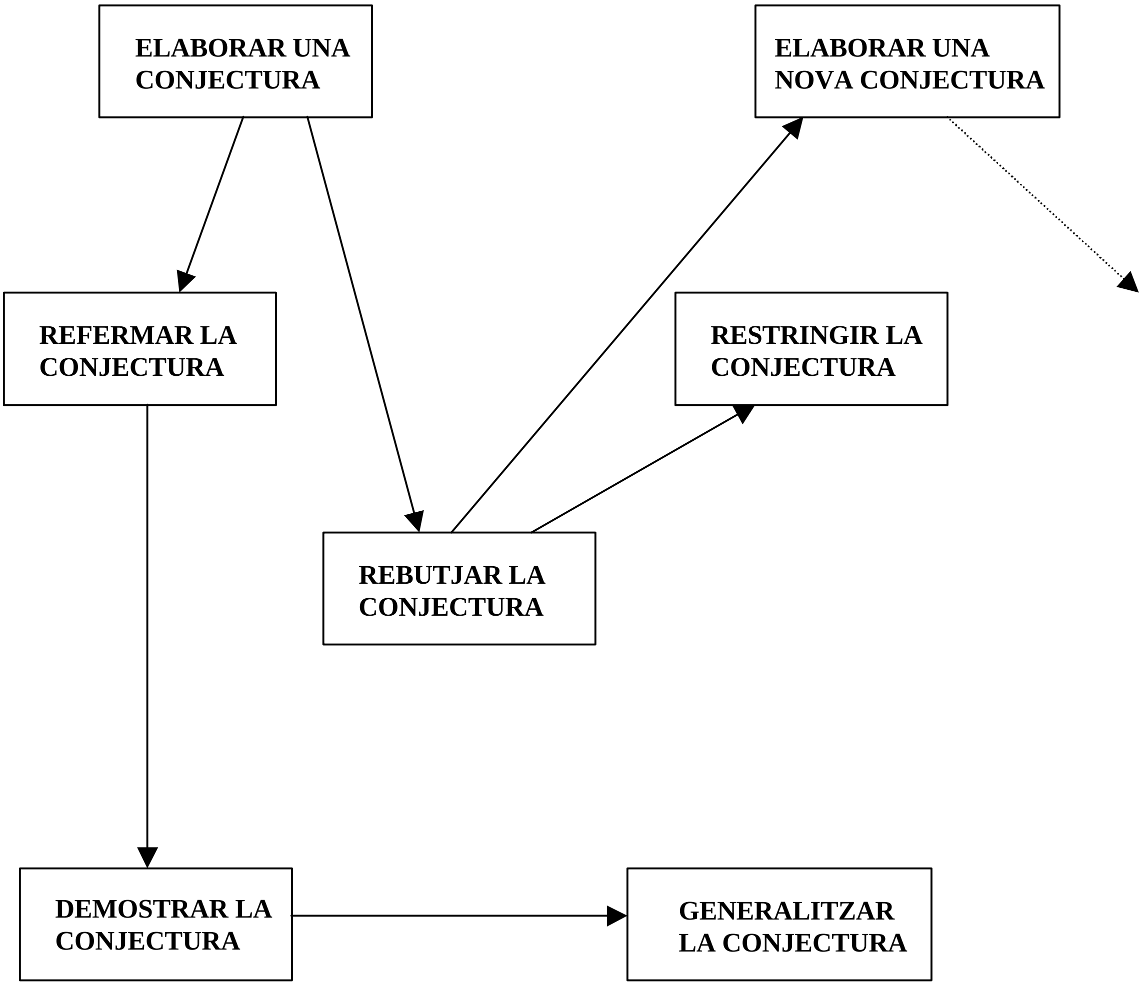
Així doncs, fer vertaderes matemàtiques ha de passar necessàriament pel treball inductiu amb conjectures.

4.3.2. Aprendre a fer conjectures

La formulació de conjectures a partir de "l'observació mental" és part essencial de les matemàtiques. Podríem pensar que això no és a l'abast de l’alumnat, però no és pas així. Cal acostumar-los a formular conjectures i a posar-les a prova. El que potser sí que queda fora del seu abast és demostrar-les.

Ara mateix, els estudiants de secundària estan massa acostumats que les matemàtiques siguin un terreny d'una solidesa absoluta. Cal que se’ls faci veure que, en realitat, i en primera instància, les matemàtiques són un món de conjectures del qual emergeix un residu molt sòlid després de força treball.

Les activitats d'investigació matemàtica poden emmarcar-se a l’esquema següent:



Les conjectures es formulen a partir d'indicis que permeten una intuïció. Es rebutgen i es refermen amb exemples i casos particulars abundosos. Es demostren -o creiem que es demostren- amb raonaments de convicció. De vegades, quan es rebutgen amb contraexemples, es pot cercar en quin àmbit encara són vàlides: es restringeixen.

Tots aquests processos són certament difícils de reproduir en una aula. No s’hi hauria de renunciar, però, tan fàcilment i, com a mínim sempre que sigui possible, fóra interessant intentar-ho.

4.4. EXEMPLES DESENVOLUPATS

A continuació, s’exposen dos exemples d’activitats a l’aula, experimentades personalment a 3r o 4t d’ESO. Com en el cas dels exemples per a la geometria plana, se’n podrien fer readaptacions per a primer cicle.

A cada exemple, després del material dels alumnes, es fan uns comentaris per al professorat que poden ser també d’interès.

4.4.1. Exemple 1: POLÍEDRES

Aquest exemple consta d'un seguit d'activitats seqüenciades que poden fer-se en unes tres o quatre sessions de classe.

No es deixaran els amplis espais entre els apartats de l'activitat, que sí que tindrien els alumnes en els seus fulls de treball. A cada exemple es donen:

1. El material dels alumnes, que inclou:

    -activitats per fer a l'aula en grup, individualment o col·lectivament.

2. El material del professor, que inclou:

    -un comentari general;

    -una referència als continguts;

    -comentaris als apartats amb les solucions si escau;

    -un recull d'il·lustracions amb políedres.

MATERIAL DELS ALUMNES

ACTIVITAT 1: POLÍEDRES

Activitat a desenvolupar en grups de treball i individualment.
Materials necessaris: Creator i transportador d'angles.

1. Construïu políedres emprant les peces de Creator.

Compteu el nombre de cares, el nombre de vèrtexs i el nombre d'arestes, i empleneu la taula següent:

NOM DEL POLÍEDRE	NOMBRE DE CARES	NOMBRE DE VÈRTEXS	NOMBRE D'ARESTES

NOM DEL POLÍEDRE	NOMBRE DE CARES	NOMBRE DE VÈRTEXS	NOMBRE D'ARESTES

2. Expliqueu el procediment que heu seguit per fer els recomptes demanats. Trobeu una estratègia que us permeti comptar amb seguretat els políedres "complicats".

3. Feu una descripció senzilla i per escrit dels políedres que heu construït.

4. D'entre els políedres anteriors, quins us sembla que mereixen el qualificatiu de regulars i per què?

5. Si no els teniu tots (són cinc) construïu-los ara i feu una taula com l'anterior només amb aquests políedres:

NOM DEL POLÍEDRE	NOMBRE DE CARES	NOMBRE DE VÈRTEXS	NOMBRE D'ARESTES
TETRÀEDRE			
OCTÀEDRE			
ICOSÀEDRE			
HEXÀEDRE			
DODECÀEDRE			

6. Si no la teniu ja, feu una descripció per escrit dels políedres regulars.

7. Busqueu una relació entre el nombre de cares ***C***, el nombre de vèrtexs ***V*** i el nombre d'arestes ***A*** dels políedres que us han sortit en els apartats anteriors. Aquesta relació s'anomena fórmula d'Euler, ja que fou aquest matemàtic suís del segle XVIII qui la va introduir.

8. Construïu els prismes que pugueu amb les peces de Creator i mireu si compleixen la relació que heu trobat abans.

9. Podríeu demostrar-la per a tots els prismes? Com podríeu comptar les cares, les arestes i els vèrtexs d’un prisma qualsevol?

10. Construïu les piràmides que pugueu amb les peces de Creator i mireu si compleixen la relació d'Euler.

11. Podríeu demostrar-la per a totes les piràmides? Com podríeu comptar les cares, les arestes i els vèrtexs d’una piràmide qualsevol?

12. Tots els políedres compliran la relació d'Euler? Què opineu i per quin motiu?

13. Empleneu la taula següent:

NOM DEL POLÍEDRE	**ANGLES DE LES CARES**	**SUMA DELS ANGLES A CADA VÈRTEX**	**DEFICIÈNCIA ANGULAR EN UN VÈRTEX**	**NOMBRE DE VÈRTEXS**	**SUMA DE LES DEFICIÈNCIES ANGULARS**
	a_i	Σa_i	$360º - \Sigma a_i$	V	V(360º-Σa_i)
TETRÀEDRE					
OCTÀEDRE	60º	240º	120º	6	720º
ICOSÀEDRE					
HEXÀEDRE					
DODECÀEDRE					

14. Quines conclusions podeu extreure a partir de l'estudi de la taula?

MATERIAL DEL PROFESSOR

A continuació, s'exposen els comentaris per al professorat referits a aquesta activitat. Novament cal entendre-ho tot amb certa dosi de flexibilitat, perquè l'alumnat pot ser molt diferent.

COMENTARIS PER A L'ACTIVITAT 1

DURACIÓ PREVISTA: 3-4 HORES

1. Introducció

Es dóna aquí una versió curta de l'activitat i s'esmenten les possibles ampliacions a l'apartat 4 d'aquests comentaris.

Aquesta activitat està pensada perquè es faci, en part, en grups de treball i, en part, individualment.

2. Què es treballa amb aquesta activitat?

1. Nomenclatura i classificació dels políedres.
2. Elements dels políedres.
3. Distinció entre políedre còncau i políedre convex.
4. Políedres regulars.
5. Teorema d'Euler a l'espai.
6. Inducció empírica de lleis. Límits de les conjectures.

3. Comentaris als apartats

Apartats 1, 2 i 3

Aquest primer apartat vol deixar molta llibertat a l'alumnat. No cal partir ni tan sols de la definició de políedre ni de la nomenclatura. Es tracta que experimentin, preferiblement en grups, i que construeixin políedres de manera intuïtiva. La necessitat d'una nomenclatura apareixerà així de forma natural.

Pot ser força interessant demanar-los que descriguin per escrit les figures creades i que els altres grups intentin construir-les amb aquestes dades.

El professor, en qualsevol cas, haurà de fer les precisions necessàries. Inicialment serà bo fer-los veure com s'encaixen les peces correctament, cosa que en general capten amb facilitat.

Pel que fa als recomptes, cal dir que es persegueix l'objectiu que trobin alguna forma segura i fiable de comptar (que no consisteixi a fer servir totes les mans del grup...). Se'ls poden fer els suggeriments següents de forma progressiva:

i) Quantes cares de cada mena heu fet servir per construir el políedre?

ii) Quants vèrtexs té cada cara? Quantes cares concorren a cada vèrtex del políedre?

iii) Quantes arestes té cada cara? A quantes cares és comuna cada aresta?

Així, per exemple, per a un icosàedre tindran:

i) S'han fet servir 20 triangles equilàters: $C = 20$.

ii) Cada cara té 3 vèrtexs. A cada vèrtex del políedre hi concorren 5 triangles. Per tant:

$$V = (20 \text{ x } 3)/ 5 = 12$$

iii) Cada cara té 3 arestes. Cada aresta és comuna a 2 cares. Per tant:

$$A = (20 \text{ x } 3) / 2 = 30$$

Si el políedre no és regular, hauran d'estudiar el mateix per a cada classe de cares i de vèrtexs si cal. Així, per exemple, per a un cuboctàdre tindran:

i) S'han fet servir 6 quadrats i 8 triangles equilàters. Això dóna 6 + 8 = 14 cares = C.

ii) Es tenen 6 quadrats amb 4 vèrtexs i 8 triangles amb 3 vèrtexs. A cada vèrtex del políedre hi concorren 4 cares. Per tant:

$$V = [(6 \text{ x } 4) + (8 \text{ x } 3)] / 4 = 12.$$

iii) Anàlogament:

$$A = [(6 \text{ x } 4) + (8 \text{ x } 3)] / 2 = 24.$$

A l'activitat poden sortir políedres de tota mena. No tots tindran un nom canònic; en aquests casos els poden batejar a base d'atributs. Per exemple, políedre1: còncau/convex de tantes cares de tal mena i tantes de tal altra, etc.

És probable que surti algun políedre còncau i improbable que en surti cap amb algun forat o que no compleixi el teorema d'Euler. Pot ser que el concepte de cara, de vèrtex, d'aresta, i, fins i tot, el de políedre, trontolli en algun d'aquests casos; això, però, serà molt enriquidor.

Apartats 4, 5 i 6

No es tracta que els alumnes arribin a fer una definició estricta del concepte de políedre regular; es tracta, sobretot, que observin amb atenció les diverses figures que han construït i que seleccionin les que considerin regulars. Es poden suscitar algunes situacions interessants. És possible, per exemple, que considerin el deltàedre de sis cares com a políedre regular. Serà convenient, aleshores, demanar-los que comparin aquest políedre amb l'octàedre i que vegin que el nombre de cares a cada vèrtex no és el mateix en el cas del deltàedre.

La taula amb els noms es pot mantenir amagada fins que es consideri necessari.

Convé que cada grup d'alumnes construeixi i descrigui tots els políedres regulars.

Apartat 7

És convenient que el professor hagi detectat possibles errors de recompte abans de proposar aquest apartat de l'activitat. No és fàcil que, sense ajuda, tots els grups o tots els alumnes arribin a fer la conjectura $C + V = A + 2$. L'ajuda que es pot donar en última instància, si no progressen, és: "sumeu el nombre de cares i el nombre de vèrtexs i observeu el que passa".

És molt important que se'ls faci veure que això només és una conjectura i que, per tant, podria resultar falsa com la de la "regió perduda" (vegeu les activitats de geometria plana).

Apartats 8, 9, 10 i 11

Amb aquests apartats s'intenta donar plausibilitat a la conjectura feta.

Amb Creator només es poden construir alguns prismes i piràmides; valdria la pena recordar les piràmides obliqües.

Les demostracions per a prismes i piràmides són relativament senzilles si l'alumnat té en compte l'estructura d'aquests políedres. Tanmateix, però, molt pocs alumnes entendran plenament les demostracions i tampoc tindran gaire clara la necessitat de fer-les. La generalització a un prisma o a una piràmide qualsevol amb bases de *n* costats és un pas que comporta un grau d'abstracció que no és a l'abast de tothom. Malgrat tot, aquesta és una bona ocasió per fer les primeres passes en la introducció del raonament deductiu. Aquestes són les proves:

a) Un prisma és un políedre format per dues bases iguals i paral·leles; totes les cares laterals són paral·lelograms. Si les bases són polígons de *n* costats, el prisma tindrà *n* cares laterals i els valors de *C*, *V* i *A* són els següents:

$C = 2 + n$ (les dues bases i les *n* cares laterals);

$V = 2n$ (els *n* vèrtexs de la base superior més els *n* de la base inferior);

$A = 2n + \frac{2n}{2} = 3n$ (comptem les *n* arestes de cadascuna de les dues bases més les 2*n* arestes dels paral·lelograms compartides sempre per dues cares).

La relació d'Euler es compleix, doncs, per a qualsevol prisma:

$C + V = 2 + n + 2n = 2 + 3n = A + 2.$

b) Una piràmide és un políedre format per una base que és un polígon qualsevol de *n* costats i totes les cares laterals són triangles. Els valors de *C*, *V* i *A* són els següents:

$C = 1 + n$ (la base i les *n* cares laterals);

$V = 1 + n$ (els *n* vèrtexs de la base i el vèrtex o cim de la piràmide);

$A = n + \frac{2n}{2} = 2n$ (comptem les *n* arestes de cadascuna de les dues bases més les 2*n* arestes laterals dels triangles compartides sempre per dues cares).

Novament constatem, doncs, que la relació d'Euler es compleix per a qualsevol piràmide:

$C + V = 1 + n + 1 + n = 2 + 2n = A + 2.$

Apartat 12

A l'apartat 1 poden haver sorgit políedres que no compleixen la relació d'Euler, però això és molt improbable. Cal tenir en compte també que, en principi, l'alumnat tindrà la convicció que el teorema és vàlid per a qualsevol políedre.

Es pot aprofitar l'activitat per presentar-los altres políedres que no hagin vist, entre els quals se n'hi poden incloure alguns que no compleixin el teorema d'Euler. Per exemple:

a) L'estrella octangular que es pot construir amb Creator i que els farà dubtar sobre els conceptes de cara, d'aresta i de vèrtex.

b) Marcs variats: un marc de secció triangular i base plana, un d'anàleg però sense base plana (per exemple, simètric), un marc de secció trapezoïdal (aquests tres no es poden construir amb Creator i caldrà portar-los o dibuixar-los) i un marc de secció rectangular que es pot construir amb Creator. Només el darrer dels marcs compleix el teorema (amb recompte intuïtiu).

c) Dos cubs enganxats per una aresta (el políedre resultant no compleix el teorema).

d) Un cub amb un forat en una cara, però no traspassat, i un cub gran amb un cub petit a sobre d'una de les seves cares. Cap dels dos compleix el teorema.

e) Formes estrellades dels políedres[1].

Vegeu la taula següent[2]:

NOM DEL POLÍEDRE	NOMBRE DE CARES	NOMBRE DE VÈRTEXS	NOMBRE D'ARESTES
ESTRELLA OCTANGULAR	8	8	12
MARC DE SECCIÓ TRIANGULAR I BASE PLANA	9	12	20
MARC DE SECCIÓ TRIANGULAR I SENSE BASE PLANA	12	12	24
MARC DE SECCIÓ TRAPEZOÏDAL	16	16	24
MARC DE SECCIÓ RECTANGULAR	10	16	24
CUBS ENGANXATS PER UNA ARESTA	10	16	23
CUB AMB CLOT CÚBIC EN UNA CARA	11	16	24
CUB GRAN AMB UN CUB PETIT SOBRE UNA DE LES CARES	11	16	24
PETIT DODECÀEDRE ESTRELLAT	12	12	30
GRAN DODECÀEDRE ESTRELLAT	12	20	30
GRAN DODECÀEDRE	12	12	30
GRAN ICOSÀEDRE	20	12	30

([1])Vegeu-ne les representacions planes de l'apartat 5.
([2]) En alguns casos es fa servir el concepte intuïtiu de cara, vèrtex i aresta que poden tenir els alumnes, sense aprofundir en consideracions topològiques ni entrar en el concepte de símplex, que estaria fora de l'abast d'aquestes sessions.

La conclusió de l'apartat passa per veure els límits de la conjectura feta a 7. Per no complicar-ho es pot dir que el teorema d'Euler és vàlid per als políedres convexos.

Apartats 13 i 14

En aquests apartats es recupera el treball amb angles de les activitats de geometria plana.

Els políedres que compleixen el teorema d'Euler sempre donaran una deficiència angular de 720º. Es pot demostrar que aquestes dues condicions són equivalents, però potser això estarà fora de les possibilitats dels nostres alumnes. Se'n dóna aquí la demostració per si es considera interessant exposar-la:

Considereu un políedre convex de C cares, V vèrtexs i A arestes.

La deficiència angular D total serà igual a 360º pel nombre de vèrtexs, menys la suma dels angles de totes les cares:

$$D = (V \cdot 360º) - (\text{suma dels angles de totes les cares})$$

Es calcula aquesta darrera suma:

Cara 1: polígon de x_1 costats; suma dels angles de la cara 1 = $(x_1 - 2)$. 180º
Cara 2: polígon de x_2 costats; suma dels angles de la cara 2 = $(x_2 - 2)$. 180º
....
....
....
Cara C: polígon de x_C costats; suma dels angles de la cara $C = (x_C - 2)$. 180º

Si se suma tot, s'obtindrà la suma dels angles de totes les cares:

$$S = (x_1 - 2) \cdot 180º + (x_2 - 2) \cdot 180º + ... + (x_C - 2) \cdot 180º =$$
$$= (x_1 + x_2 + ... + x_C) \cdot 180º - 2 \cdot 180º \cdot C = 2 \cdot A \cdot 180º - 2 \cdot 180º \cdot C = 360º \cdot (A - C)$$

(ja que $x_1 + x_2 + ... + x_C = 2 \cdot A$, en ser cada costat comú a dues cares)

Ara es pot calcular la deficiència angular total:

$$D = 360º \cdot V - [360º (A - C)] = 360º \cdot [C + V - A]$$

Si un políedre compleix el teorema d'Euler $[C + V - A] = 2$ i $D = 720º$ i, recíprocament, si $D = 720º$, per força $[C + V - A] = 2$ i el políedre complirà el teorema d'Euler.

Si es considera convenient fer la demostració, abans caldrà que omplin la taula, preferentment amb políedres convexos que ja hagin sortit en apartats anteriors, tot i que també pot ser interessant incloure-n'hi alguns de nous que es puguin construir amb Creator; per exemple, tots els deltàedres, les bipiràmides i alguns políedres arquimedians.

4. Possibles activitats complementàries

Finalment, s'esmenten algunes activitats que es poden fer partint del treball amb Creator, força interessants i que poden servir com a feina a casa o com a base per construir noves activitats o cadenes d'activitats:

1) La construcció de tots els deltàedres.

2) La construcció de políedres arquimedians i de políedres estrellats.

3) Problemes relacionats amb la coloració de les cares dels políedres.

4) Estudi de les representacions planes dels políedres.

5) Estudi de les seccions del cub.

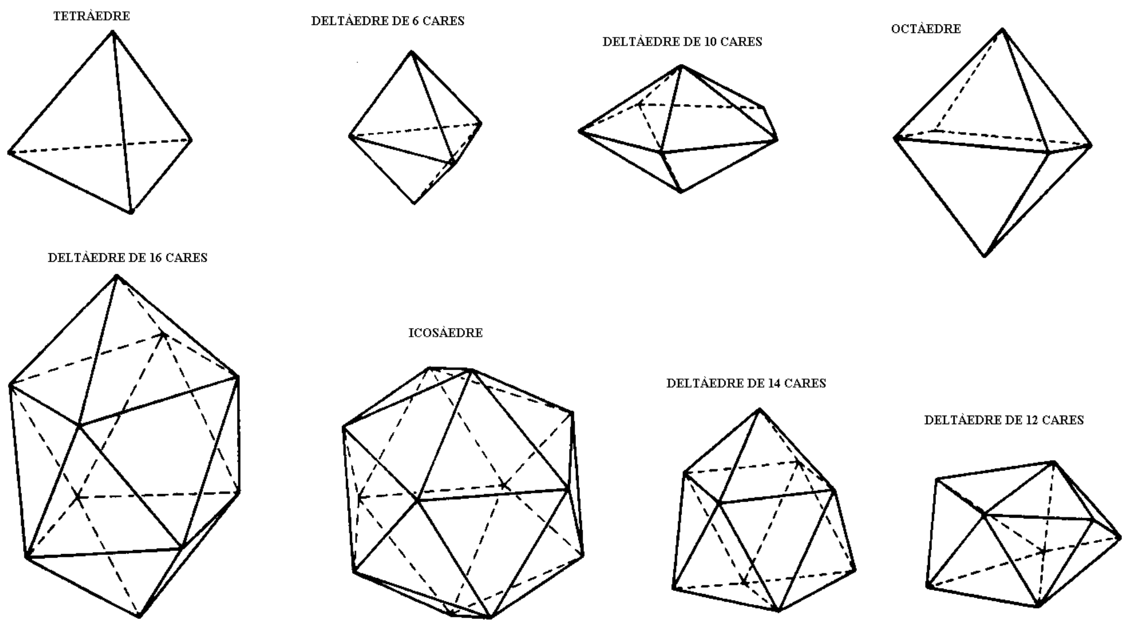
6) Cristal·lografia geomètrica.

7) Història dels políedres.

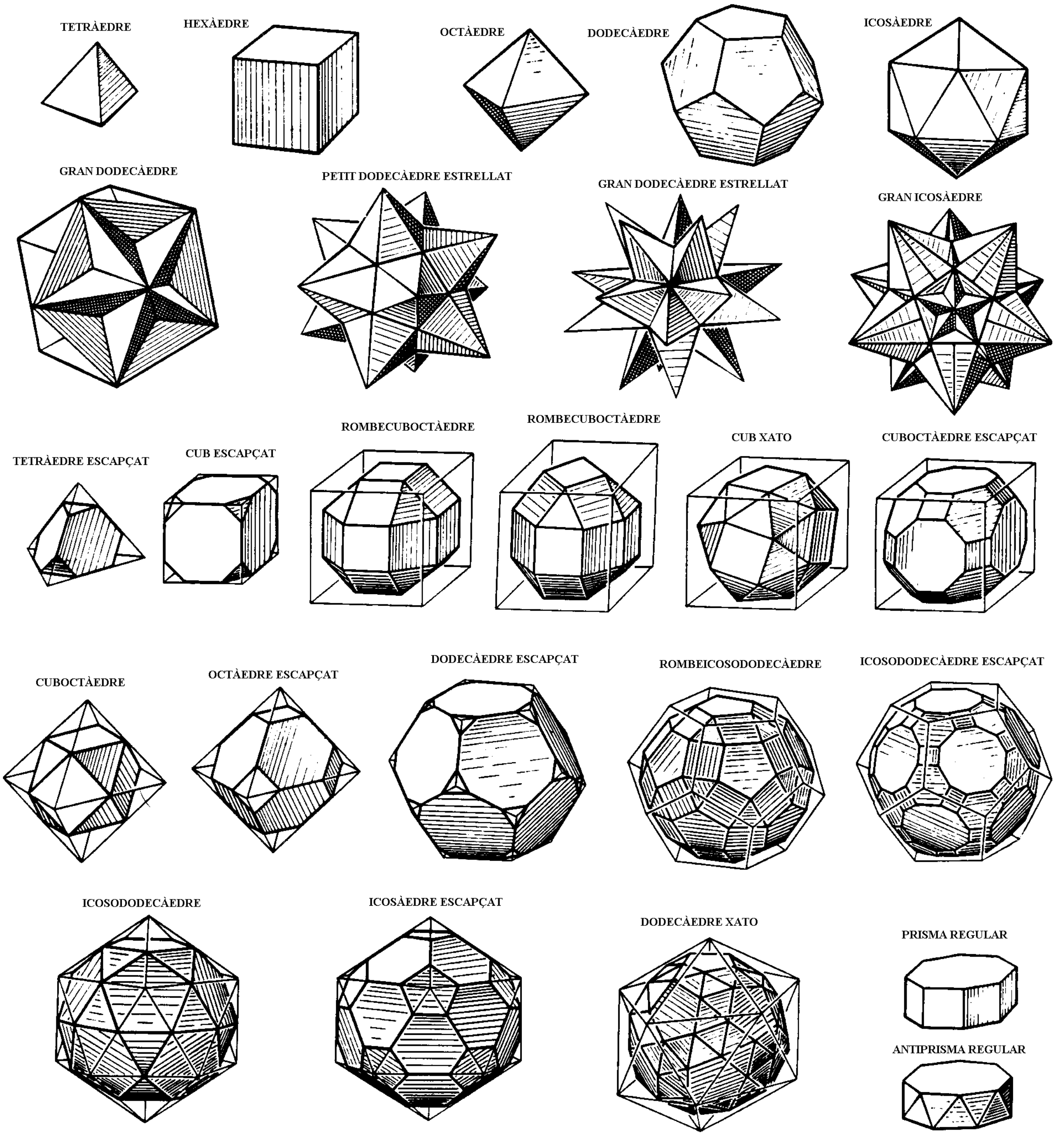
5. Possibles il·lustracions planes

Si es considera necessari, per recapitular, es poden oferir les il·lustracions planes d'alguns políedres després de les parts inicials de les activitats o en acabar-les:

ELS VUIT DELTÀEDRES



ELS CINC POLÍEDRES REGULARS, ALGUNS POLÍEDRES ESTRELLATS I ELS POLÍEDRES ARQUIMEDIANS



4.4.2. E xemple 2: DESENVOLUPAMENTS PLANS D'ALGUNS POLÍEDRES ÀREES I VOLUMS D'ALGUNS POLÍEDRES

MATERIAL DELS ALUMNES

ACTIVITAT 2: DESENVOLUPAMENTS PLANS

Activitat a desenvolupar en grups de treball i individualment.
Materials necessaris: Creator

1. Agafeu 4 peces en forma de triangle equilàter de Creator, poseu-les planes sobre la taula i estudieu quines agrupacions permeten construir tetràedres i quines no ho permeten. Dibuixeu-les totes.

2. Agafeu 6 peces en forma de quadrat de Creator, poseu-les planes sobre la taula i estudieu quines agrupacions permeten construir hexàedres i quines no ho permeten. Dibuixeu només les que ho permeten.

3. Mesureu el costat del cub en cm i mm i calculeu la seva àrea en cm^2 i en mm^2. Trobeu també el volum del cub en cm^3 i en litres. Aproximadament, quants cubs com aquests caldrien per omplir tota l'aula? Expliqueu com feu els càlculs.

4. Agafeu 8 peces en forma de triangle equilàter de Creator, poseu-les planes sobre la taula i estudieu quines agrupacions permeten construir octàedres i quines no ho permeten. Dibuixeu les que ho permeten.

5. Mesureu el costat de l'octàdre en cm i mm i empreu el teorema de Pitàgores per calcular les altures de les cares i l'altura del políedre. A continuació, calculeu-ne l'àrea en cm^2 i en mm^2.

A partir de la fórmula que permet calcular el volum d'una piràmide, trobeu el volum de l'octàedre en cm^3 i en litres. Aproximadament, quants octàedres com aquests caldrien per omplir tota l'aula? Expliqueu com feu els càlculs.

MATERIAL DEL PROFESSOR

COMENTARIS PER A L'ACTIVITAT 2

DURACIÓ PREVISTA: 3 HORES

1. Introducció

Aquesta activitat està pensada perquè es faci en grups de treball, tot i que es pot fer també individualment.

El primer apartat és assolible per a la gran majoria de l'alumnat. El segon, el quart i el cinquè, en canvi, presenten més dificultats. Per això mateix se suggereix que es facin en grups. Amb tot, el fet de poder manipular les peces físicament, permetrà a molts alumnes fer bona part de les feines proposades.

2. Què es treballa amb aquesta activitat?

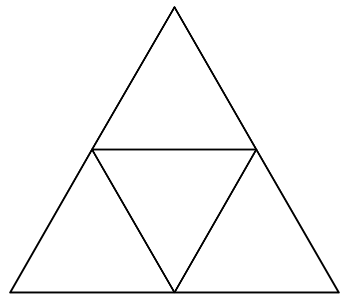
1. Representació plana dels políedres.
2. Desenvolupaments plans dels políedres.
3. Tècniques de recompte i d'exposició de casos.
4. Transformacions que fan que dos desenvolupaments siguin iguals.
5. Àrea i volum d'un cub, d'una piràmide i d'un octàedre regular.
6. Ús del teorema de Pitàgores.
7. Estimació de mesures.
8. Conversió d'unitats en el sistema mètric decimal.

3. Comentaris als apartats

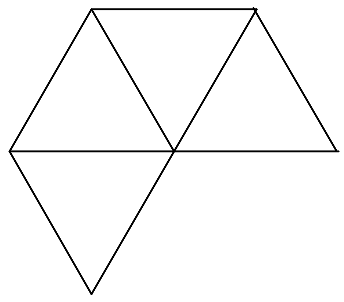
Apartat 1

El cas del tetràedre és extremadament simple:

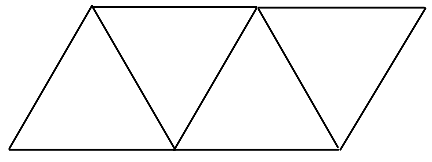
Desenvolupament 1: dóna un tetràedre.



Desenvolupament 2 i el seu simètric que s'ha de considerar iguals: no donen un tetràedre.

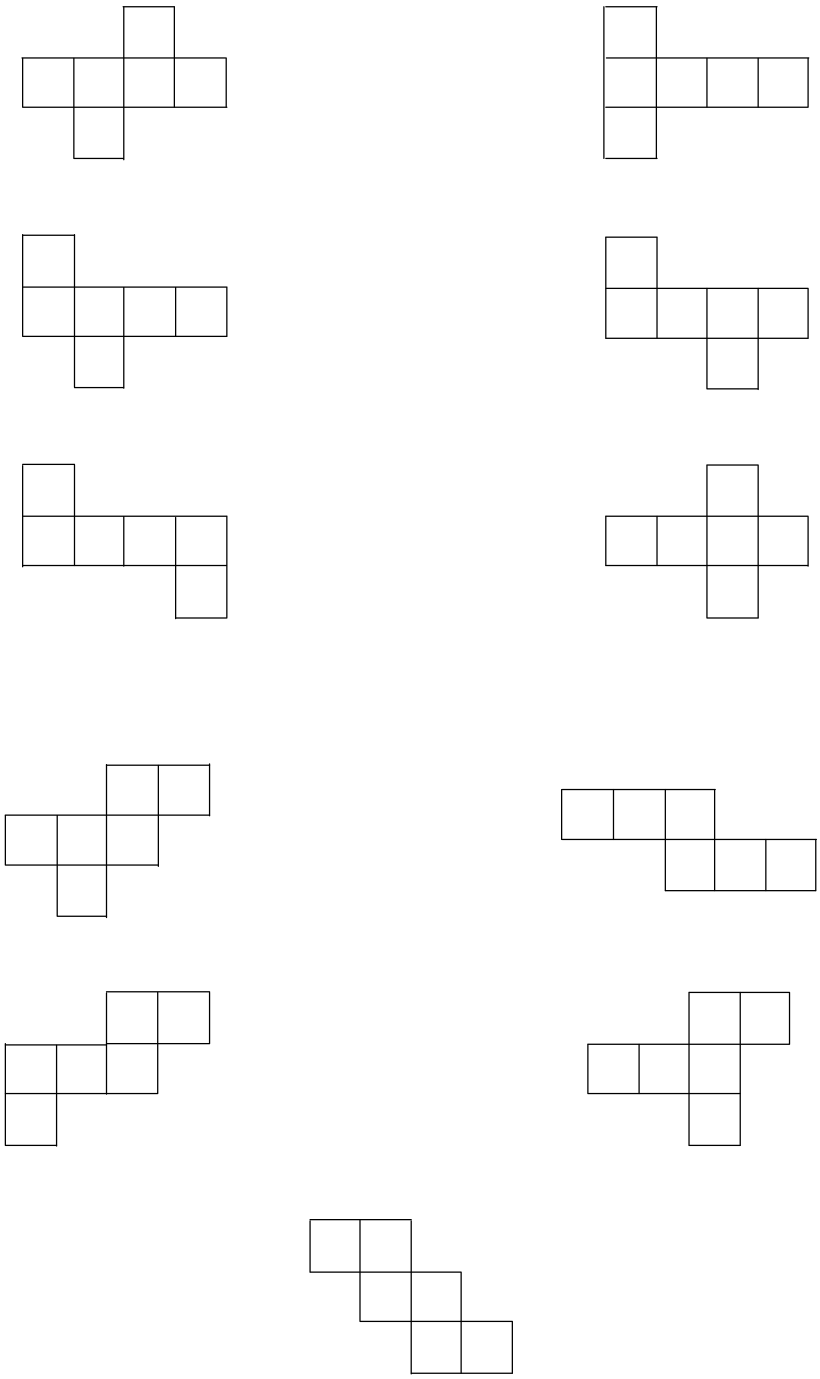


Desenvolupament 3: dóna un tetràedre



Apartat 2

En el cub les coses ja es compliquen. Hi ha 11 desenvolupaments plans diferents:



Si es considera necessari, es pot donar la indicació que hi ha onze desenvolupaments plans diferents del cub. Si algun grup té dificultats per acabar de trobar les onze figures, es pot donar la indicació suplementària que n'hi ha sis amb una fila de quatre quadrats, quatre amb una fila de tres i un només amb files de dos quadrats. Cal insistir, però, que el fet de poder manipular les peces permetrà a molts alumnes sortir-se'n.

Apartat 3

El tercer apartat és totalment diferent -entra en l'àmbit del càlcul d'àrees i de volums senzills i del treball amb magnituds- i no ha de comportar grans dificultats. Només l'estimació del volum de l'aula pot comportar algun dubte.

La mesura del costat del cub s'ha de fer quan el tenen muntat (així és mes fàcil i mes clar) i els hem d'exigir que ho facin amb cura. Certament, no vindrà d'un mil·límetre; no s'han d'admetre, però, mesures amb un error de tres o quatre mil·límetres.

El càlcul de l'àrea apareix de forma natural després dels desenvolupaments.

El càlcul del volum també es pot visualitzar, fins a cert punt, a partir del cub i del nombre de cm^3 que conté.

L'estimació de les mesures de l'aula es pot fer de diverses maneres: els podem demanar de fer-ho sense abandonar el seu lloc o bé els podem permetre que comptin passes o rajoles.

En aquest context real la transformació de mesures ha de permetre que atorguin significat a les operacions que fan.

Apartat 4

El cas dels octàedres presenta alguna dificultat més que el dels cubs i s'ha de reservar a grups d'alumnes avançats. De moment no es fan més comentaris, ja que es proposa com a problema al final d'aquest capítol. La resolució es pot trobar a l'annex 2.

Apartat 5

El càlcul de l'àrea i del volum de l'octàedre depèn aquí de la utilització del teorema de Pitàgores.

Si no ho fan espontàniament, cal invitar els alumnes a dibuixar un dels triangles equilàters que formen les cares de l'octàedre per poder-hi aplicar el teorema amb la màxima correcció. És possible que alguns alumnes es decideixin a fer una mesura directa de l'altura. En aquests casos convé que comparin el resultat amb l'obtingut mitjançant el teorema.

La utilització del teorema de Pitàgores per al càlcul de l'altura de l'octàdre els resultarà més complicada i s'hauran d'ajudar d'un dibuix en tres dimensions que representi una piràmide quadrangular (la que s'obté en seccionar l'octàdre per un dels plans de simetria). En aquest cas, a més, la mesura directa no és senzilla i la utilització del teorema sembla molt més necessària que en el cas de les cares del políedre.

Exercicis i activitats proposades

1. Organitzeu una seqüència d'activitats anàlogues a les exposades en aquest capítol per tal de tractar les seccions planes del cub.

2. Organitzeu una seqüència d'activitats anàlogues a les exposades en aquest capítol per tal de tractar la construcció de tots els deltàedres.

Problemes de geometria

S'afegeix un problema que ha aparegut a l'activitat 2. Com en els capítols anteriors, podreu trobar la resolució a l'annex 3:

Enunciat 7

Dibuixeu els desenvolupaments plans de l'octàedre regular.

5. IDEES REFERENTS A ÀREES I VOLUMS

En aquest capítol es fa una ullada al treball amb àrees i volums. A la introducció, es remarquen els objectius didàctics de primària i de secundària obligatòria. A continuació, es comenten els materials didàctics per al treball amb àrees i volums. S'inclou, també, un apartat dedicat a la justificació de fórmules. Es clou amb alguns exemples i propostes de treball a l'aula.

5.1. INTRODUCCIÓ

No convé pensar que els conceptes d'àrea i de volum siguin senzills. Tal i com apunta Emma Castelnuovo, encara que es tracti de nocions corrents a la vida diària, són poc clares fins i tot per a molts adults. Hi ha una tendència natural a confondre perímetres amb àrees i superfícies amb volums.

Castelnuovo ens invita a fer la pregunta següent als alumnes més joves: *"D'un quadrat en sabem l'àrea; com podem determinar-ne la longitud del costat?"* Feu la prova i veureu que molts alumnes responen que cal dividir per quatre el nombre que dóna l'àrea per tal d'obtenir el costat!

També en el cas dels volums podeu fer un experiment revelador que ja proposava Galileu: agafeu un full de paper rectangular i pregunteu als vostres alumnes si generarà el mateix volum en girar al voltant de l'un i de l'altre costat; comprovareu que molts estan convençuts que el resultat ha de ser el mateix!

Els ensenyants s'han de plantejar, d'entrada, si volen un tractament diferenciat o integrat d'aquests temes. Aquí, per exemple, s'ha optat per parlar-ne a part, tot i que, a secundària, potser fóra més adient d'integrar-ho en el "tot" geomètric.

La mesura d'àrees i volums ha tingut, tradicionalment, una forta presència en els programes de secundària. Ja s'ha comentat, en capítols anteriors, que no sembla convenient centrar-hi tota la geometria tal i com, malauradament, ha passat a les darreres dècades en més d'un cas: de vegades, semblava com si tot el treball geomètric perseguís l'objectiu de calcular àrees i volums. Es tracta, sens dubte, d'un tema molt important, però no ha de monopolitzar tota l'atenció geomètrica.

Des de la perspectiva dels nous programes educatius, el treball amb àrees i volums adquireix una nova dimensió: és un context idoni per al treball del llenguatge i dels procediments geomètrics, que s'afegeix al seu valor intrínsec com a contingut.

La mesura directa i la mesura indirecta han de ser peces centrals del treball amb l'alumnat. En aquest sentit, s'ha de tenir present que la mesura directa ha estat més aviat deixada de banda a l'ensenyament tradicional, que sempre ha tendit més a l'ús de fórmules. Tots els experts coincideixen a dir que cal combinar ambdues activitats si es vol assolir un aprenentatge significatiu de l'alumnat.

Una altra novetat que s'ha tenir present és l'ús sistemàtic de representacions a escala per al càlcul d'àrees i volums. La preparació de l'alumnat per a la vida quotidiana ho fa del tot necessari.

En principi, en relació als temes d'àrees i volums, la majoria de l'alumnat que accedeixi a secundària hauria de:

Pel que fa a continguts:

i) estar acostumat a

- observar i reconèixer atributs geomètrics;
- ordenar i classificar objectes geomètrics;
- utilitzar el llenguatge geomètric;
- resoldre problemes geomètrics senzills;
- seleccionar instruments de càlcul, dibuix, mesura i construcció, i fer-ne ús.

ii) conèixer

- els conceptes de longitud, superfície i capacitat;
- les figures geomètriques de l'espai més habituals;
- els elements d'aquestes figures i les relacions entre elles.

Pel que fa a objectius terminals:

- expressar verbalment i gràficament aspectes espacials de la realitat (formes, grandàries, situació, posició, moviment, distàncies) mitjançant el llenguatge geomètric;
- saber distingir i construir models de figures espacials i trobar les seves relacions geomètriques i els elements que en possibiliten alguna classificació;
- saber comparar i classificar figures geomètriques per diversos criteris;
- reconèixer magnituds mesurables i assolir la noció de mesura a través de la comparació de quantitats d'una mateixa magnitud;
- seleccionar la unitat més adient per realitzar una determinada mesura;
- estimar l'error comès en realitzar una mesura;
- identificar i relacionar les unitats del sistema mètric decimal de longitud, superfície i volum;
- obtenir figures equivalents en àrea a figures donades;
- aplicar les nocions i els mètodes de mesura de longitud i d'àrea a la resolució de problemes reals.

Partint d'aquesta base, el professorat d'ESO hauria d'aconseguir que, en finalitzar l'etapa, la majoria de l'alumnat, sense sortir de l'àmbit de les àrees i els volums, fos capaç de:

1. Emprar les unitats de mesura més usuals en el cas de superfícies i volums.

2. Identificar i aplicar fórmules per al càlcul de superfícies planes, limitades per segments i arcs de circumferència i de volums de cossos geomètrics: prismes, piràmides, cilindres, cons i esferes.

3. Obtenir i utilitzar representacions planes de cossos geomètrics: prismes, piràmides, cilindres, cons, esferes i políedres regulars, i també, donada una representació plana, saber-la interpretar.

4. Reconèixer figures equivalents en àrea o volum.

5. Interpretar representacions a escala com ara plànols o mapes, mesurar els elements que contenen i saber-ne extreure les dades necessàries.

Una vegada més cal constatar que la distància entre les lloables intencions i els resultats, tan a primària com a secundària, pot ser important; això no treu, però, que s'hagin de conèixer els objectius legislats i que siguin una referència molt important a tenir present.

5.2. MATERIALS PER AL TREBALL DELS CONCEPTES D'ÀREA I VOLUM

Com sempre, l'ús de materials per al treball amb àrees i volums pot ser clau per a un aprenentatge significatiu d'aquests conceptes a l'ESO. A continuació es dóna una relació dels més usuals.

1. Paper mil·limetrat o quadriculat

El recompte de quadrets per tal d'estimar l'àrea d'una figura plana a escala 1:1 o a qualsevol altra escala resulta fàcilment comprensible per a la majoria d'estudiants, que poden, així, connectar de forma molt directa amb el problema.

2. Geoplà

El geoplà fou ideat pel matemàtic britànic G. Categno. Consisteix en un quadrat de fusta, de qualsevol mida, sobre el qual es fixen claus a distància fixa els uns dels altres per tal d'aconseguir un reticle d'*n x n* punts (cada clau és un punt). El més freqüent és el de 25 punts, tot i que els altres són igualment interessants. Ara mateix, es poden trobar també models en plàstic, ja construïts, que no són gaire cars.

Permet el càlcul d'àrees de figures planes "construïdes" amb l'ús de gomes elàstiques i l'estudi de l'equivalència en àrea de diverses figures.

És molt interessant per al treball del problema de la relació entre àrees i perímetres, suggerit abans.

3. Representacions a escala

Cal tenir en compte que el treball amb representacions a escala és molt important de cara a la resolució de problemes reals d'àrees i volums. Es poden calcular àrees (i volums, si és necessari i, a més, es tenen dades sobre les altures o si es té l'alçat) de pisos, locals, piscines, aules, edificis, termes municipals, territoris, parcs naturals, països, etc.

4. Tàngrams

El càlcul de les àrees de les peces que componen un tàngram -amb mesura directa i amb mesura indirecta, fent ús de fórmules- és un exercici interessant.

5. Instruments de mesura

L'ús d'instruments de mesura és molt recomanable en multitud de problemes. Cal pensar a fer servir cintes mètriques, regles mil·limetrats, peus de rei, mesuradors d'infrarojos, etc.

6. Desenvolupaments plans

Els desenvolupaments plans fets amb paper o amb Creator pels mateixos alumnes els ajudaran molt en el càlcul d'àrees de figures tridimensionals, a la vegada que els farà millorar la comprensió de "l'estructura" d'aquests cossos.

7. Immersió d'objectes en aigua

L'estimació de volums es fa més difícil que la d'àrees. Una possibilitat interessant, el desenvolupament de la qual caldria pactar amb el departament de ciències experimentals, consisteix a submergir objectes en aigua i calcular els volums desplaçats.

8. Objectes i llocs quotidians coneguts

El càlcul d'àrees i volums d'objectes reals és especialment interessant. S'esmenten aquí alguns exemples:

- Esferes: pilotes de tenis i de tenis taula, de futbol i d'handbol, la lluna, la terra i el sol.
- Cilindres: tubs de medicines, envasos de pilotes de tenis, llaunes, canonades, monedes, cigarretes, cilindres de motors, etc.
- Cons: llapis, paperines, cucurutxos de gelat, tendes de campanya, etc.
- Políedres i altres cossos: maons, tetrabriks, capses diverses, objectes i materials de construcció, baguls, femelles, cargols, l'aula, l'institut, edificis, les piràmides d'Egipte, el Partenó, etc.

5.3. ALGUNES IDEES RELATIVES A LA JUSTIFICACIÓ DE FÓRMULES

El professorat de matemàtiques s'ha de plantejar si és necessari donar justificacions, que no convé confondre amb les demostracions rigoroses, de les fórmules d'àrees i volums que es vol que retinguin o coneguin els alumnes. D'acord amb l'opinió d'alguns experts, com ara Emma Castelnuovo, val la pena d'esmerçar un temps en aquestes justificacions, que faran les fórmules més plausibles i entenedores per als estudiants.

A continuació es donen algunes idees per a aquestes justificacions.

5.3.1. Polígons

No és difícil donar justificacions no rigoroses per al càlcul d'àrees de rectangles i triangles. Si convé, es pot passar, a més, pel paper mil·limetrat o quadriculat. Tampoc no serà difícil passar després a justificar fórmules per a tot tipus de figures poligonals planes o per als desenvolupaments plans de políedres, fent, si cal, triangulacions.

5.3.2. Cercles

En el cas del cercle, es pot recórrer a un pas al límit -fet sense rigor- per tal de justificar la fórmula de l'àrea. Esquemàticament, es diria: "imagineu el cercle compost per infinits triangles, tots d'altura *r*; les seves bases mesuren, en total, 2*pr*; per tant l'àrea del cercle és $\frac{1}{2}(2pr \cdot r) = pr^2$ ". En aquest cas també es pot recórrer, si cal, a l'ús de paper mil·limetrat, com a pas previ.

5.3.3. Volums

Per als volums es tenen els recursos següents:

i) Mesures directes per immersió

Recurs de laboratori només aplicable a objectes petits i amb els inconvenients coneguts de la disponibilitat dels laboratoris.

ii) Descomposició

La idea consisteix a descompondre els cossos en peces de volum fàcilment calculable.
Per exemple, per a una piràmide de base quadrada, es considera un cub de costat ***a***, la fórmula del volum del qual és fàcil de justificar; el cub conté exactament 6 piràmides, una per a cada cara, i, per tant:

$$\text{V (piràmide)} = \frac{a^3}{6} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{3}\text{(àrea base) x (altura)}$$

iii) Ús del principi de Cavalieri

L'anomenat principi de Cavalieri (de Bonaventura Cavalieri (1558-1648), jesuïta nat a Milà, deixeble de Galileu) pot tenir força utilitat a secundària i així ho manifesta Emma Castelnuovo que el considera de base força intuïtiva: *"És cert que impressiona trobar en els alumnes les idees de Bonaventura Cavalieri"*.

Heus aquí, aproximadament, la versió original del principi:

"Si dos sòlids tenen la mateixa altura i si les seccions que s'obtenen, per plans paral·lels a les bases i a la mateixa distància d'elles, mantenen una raó donada, els volums dels sòlids també la mantindran."

Ara se'n pot donar una versió més entenedora:

"Si dos cossos geomètrics estan compresos entre plans paral·lels, i totes les seccions paral·leles tenen sempre àrees iguals, aleshores els cossos tenen el mateix volum."

El principi, que l'alumnat hauria d'acceptar tot i posant-lo a prova amb exemples i analogia, proporciona un marc per a la justificació de fórmules força fructífer. A més, el principi de Cavalieri i la seva aplicació a diverses situacions té un interès intrínsec de cara a l'estimulació de la imaginació geomètrica dels estudiants.

Es proposa, a continuació, un exemple que permet reforçar la plausibilitat de l'asseveració de Bonaventura Cavalieri, fent ús d'una situació anàloga en el pla construïda amb el programa Cabri-Géomètre. A més és molt interessant que l’alumnat s'acostumi als raonaments per analogia:

1. Es construeixen dues rectes paral·leles *r* i *s*.

2. S’agafa un punt mòbil sobre *r*: *P*.

3. S’agafa una base fixa sobre *s* d'extrems *A* i *B*.

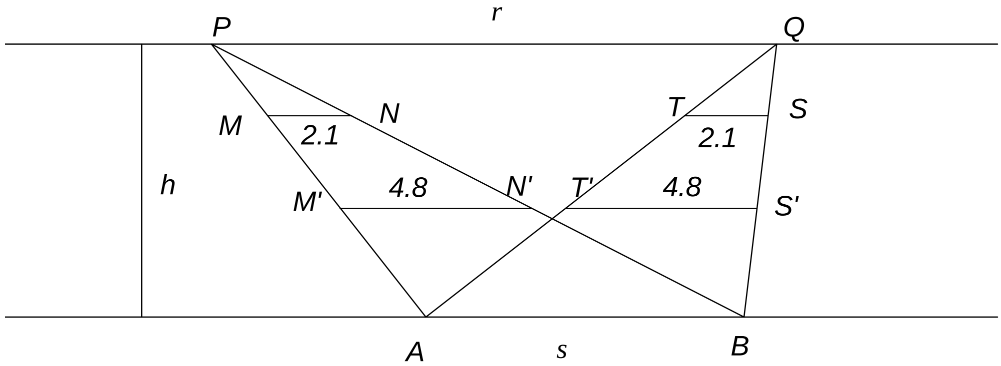
4. Es tracen els segments *PA* i *PB*.

5. S’agafen dos punts mòbils sobre *PA*: *M* i *M*'.

6. Es construeixen els segments paral·lels a *r* (o a *s*) per *M* i *M*': *MN* i *M*'*N*'.

7. S’afegeix moviment a la figura: es pot moure el punt *P* i s’obtenen noves disposicions, com la de la figura que es presenta a continuació, amb el punt *Q* ocupant la nova posició sobre la recta *r*; també es poden moure els punts *M* i *N*. Caldrà observar la variació o no de les mesures dels segments i el manteniment de l'àrea constant en els triangles de base *AB* i altura *h*.

EL PRINCIPI DE CAVALIERI EN EL PLA



A continuació, s’exposa un exemple d'utilització del principi de Cavalieri que permet calcular el volum d'una esfera[1]:

Lucca Valerio va considerar un cilindre de radi *R* i altura *R* amb:

i) Un con (de base *R* i altura *R*) inscrit en el cilindre.

([1]) De fet, així el professor Lucca Valerio va provar, en el segle XVII, que el volum d'un esfera val 4(πr^3)/3. El volum de l'esfera, però, era conegut des de l'antigor, quan Arquimedes el va calcular fent ús d'arguments semblants al pas al límit.

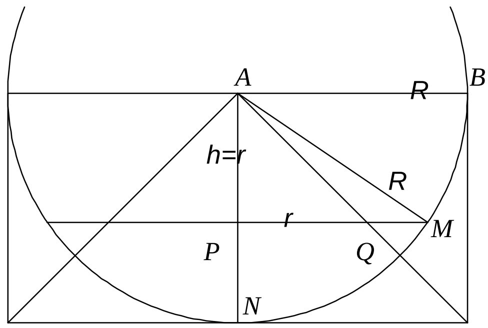
ii) Una semiesfera (de radi R) inscrita també en el cilindre.

Lucca Valerio va provar, aleshores, que les seccions paral·leles del con coincideixen, en àrea, amb les seccions del cos obtingut considerant el cilindre menys la semiesfera, cos que es coneix, a causa de la seva forma, amb el nom d'escudella de Lucca Valerio o de Galileu; efectivament es té:

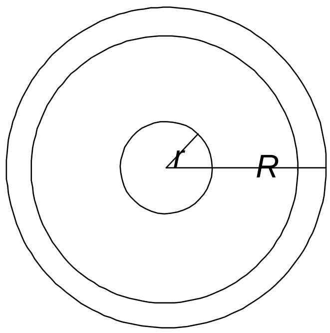
Àrea d'una secció del con = $\pi\, r^2$

Àrea d'una secció de l'escudella = $\pi\, R^2 - \pi\, (\sqrt{R^2 - r^2}\,)^2 = \pi R^2 - \pi\, (R^2 - r^2) = \pi\, r^2$

SECCIÓ PLANA VERTICAL DE L'ESCUDELLA DE GALILEU



SECCIÓ PLANA HORITZONTAL DE L'ESCUDELLA



Si s'aplica el principi de Cavalieri es conclou:

Volum con = Volum escudella = Volum cilindre - Volum semiesfera

I, per tant:

Volum semiesfera = Volum cilindre - Volum con = $\pi R^2.R - \frac{1}{3}\pi R^2.R = \frac{2}{3}\pi R^3$

Així s'obté, finalment, el volum de l'esfera:

Volum de l'esfera = $\frac{4}{3}\pi R^3$

5.3.4. L’àrea de l’esfera

Pel que fa a l’àrea de l’esfera, es pot fer un raonament anàleg al fet per a l’àrea del cercle. Es considera l’esfera composta d’infinits cons d’altura *R*; l’àrea total de les bases dels cons és la incògnita *S*. Donant per coneguda la fórmula del volum del con i la de l’esfera, es té:

$$\text{Volum de l'esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\, S \cdot R$$

Si s’aïlla *S* s’obté:

$$\text{Àrea de l’esfera} = S = 4\,\pi\, R^2$$

5.4. EXEMPLES I PROPOSTES

S’exposen, a continuació, cinc exemples d’activitats amb alumnes.

5.4.1. UNA SITUACIÓ-PROBLEMA

Aquest primer exemple consisteix en una situació-problema relacionada amb el càlcul d’àrees.

Pintar l'escola o l'institut

Imagineu que sou un grup d'alumnes que s'ofereix a pintar el centre per tal de finançar part del viatge d'estudis.

Heu de fer un pressupost i heu de calcular un termini d'execució de la feina; més concretament:

1) Heu trobat pintura blanca que té un rendiment de 5 m^2 per kg i que val 5 euros el pot de 5 kg. Cal donar dues capes de pintura. Què us costarà la pintura?

2) Si com a mitjana una persona pot pintar 10 m^2 per hora, tenint en compte les dificultats que comporten els marcs de portes i finestres que no es poden tacar, quantes hores caldrà esmerçar-hi? Entre quants i durant quants dies deixareu llesta la feina?

3) Feu el pressupost assignant un preu a cada hora treballada.

L’activitat està pensada per desenvolupar-la en grups de treball. És evident que el plantejament d'una activitat com aquesta comporta algunes dificultats d’organització que caldrà valorar abans de posar-s'hi:

a) Es disposarà del temps necessari per fer-la bé?

b) Es disposarà dels materials adequats per dur-la a terme?

c) Es podrà controlar la feina dels grups i dels alumnes de manera efectiva?

Si no es pot respondre afirmativament aquestes qüestions, l'activitat quedaria coixa i perdria, en gran part, el seu sentit.

Si s'esquematitza l'activitat segons la ja clàssica proposta de Polya, relativa a la resolució de problemes, caldrà tenir en compte que la fase I -de comprensió del problema- i la fase II -de plantejament i estratègies- s'haurien de fer a l'aula. La fase III -d'execució- comportaria treball fora de l'aula. Finalment, la fase IV -de revisió i conclusions- s'hauria de fer novament a l'aula.

A continuació es comenten les quatre fases de Polya. Sembla preferible treballar les dues primeres fases conjuntament, ja que interaccionen l'una amb l'altra.

Fase I: Comprensió del problema
i Fase II: Plantejament i estratègies

Un cop es tenen els alumnes organitzats en grups se'ls ha de donar una estona perquè estudiïn l'enunciat i comencin a recollir a les seves llibretes les observacions que considerin necessàries.

El fet que una dada imprescindible -la superfície total a pintar- no consti a l'enunciat pot provocar algunes pertorbacions, perquè estan massa acostumats que se'ls donin totes les dades.

Evidentment, han d'arribar a la conclusió que cal obtenir aquesta dada i que han de dissenyar una estratègia fiable per aconseguir-la.

Pot ser molt interessant demanar als grups que facin estimacions mentals raonades tant de la superfície total a pintar, com del pressupost final o del temps d'execució. Després, a la fase IV, caldrà contrastar les estimacions mentals amb les reals.

Pel que fa a l'organització pràctica de la mesura de la superfície a pintar, serà bo deixar-los inicialment plena llibertat de propostes per tal d'arribar a conclusions conjuntes amb tot el grup-classe, després d'una discussió.

Les conclusions necessàries poden ser les següents:

a) Llista de materials necessaris: instruments de mesura, escales, etc.

b) Organització efectiva de l'amidament: repartiment dels espais a amidar entre els grups. Pot resultar interessant que cada zona sigui amidada per dos grups de cara a controlar errades.

c) Organització de la recollida de dades. Notació a utilitzar. Unitats.

Si cal, es pot fer un assaig inicial a l'aula abans que els grups comencin la seva actuació.

Fase III: Execució de l'estratègia

Una vegada tinguin la dada que els mancava, no és de preveure que hi hagi dificultats per calcular, amb algunes senzilles regles de tres, els quilograms de pintura necessaris i el preu que tindran.

Tampoc els ha de ser difícil calcular les hores necessàries per a l'execució. De fet, aquí, el problema que tindran és que els caldrà decidir pel seu compte amb quanta gent ho fan i quantes hores treballen diàriament. La redacció final del pressupost també comportarà alguna dificultat.

Fase IV: Revisió de les solucions i conclusions

Com ja s'ha comentat, en aquesta fase és interessant que els alumnes contrastin les seves estimacions inicials amb els resultats finals.

També caldrà fer una revisió crítica de tot el procés, sobretot de l'organització, per tal de fer propostes que el puguin millorar.

5.4.2. ESTIMACIONS

El segon exemple que s'exposa es refereix a fer estimacions d'àrees i volums. Saber estimar correctament àrees i volums pot ser d'utilitat a la vida quotidiana. A més, és un exercici que en general resulta engrescador per a l'alumnat a causa de la claredat del plantejament i la immediatesa dels objectius.

a) Feu una estimació sense emprar cap instrument de mesura, com ara regles o cintes mètriques, de les àrees dels objectes o llocs següents. Expliqueu clarament el raonament que feu per tal d'arribar a la vostra conclusió. Aneu amb compte amb les unitats!:

- àrea de la vostra aula
- àrea de la vostra taula
- àrea de la taula del professor/a
- àrea de l'institut
- àrea del camp de futbol del Barça
- àrea d'una pista de bàsquet
- àrea d'una llauna de refresc o similar
- àrea del vostre terme municipal
- àrea de Catalunya
- àrea de la península ibèrica
- àrea del continent europeu
- àrea de la terra

b) Feu una estimació dels volums dels objectes o llocs següents. Expliqueu clarament el raonament que feu per arribar a la vostra conclusió. Aneu amb compte amb les unitats!:

- volum de la vostra aula
- volum de la vostra taula

- volum de la taula del professor
- volum de l'institut
- volum del camp de futbol del Barça
- volum del palau Sant Jordi de Barcelona
- volum d'una llauna de refresc
- volum de la terra
- volum de la lluna
- volum del sol

5.4.3. DOS EXEMPLES DE LA MATEMÀTICA LÚDICA

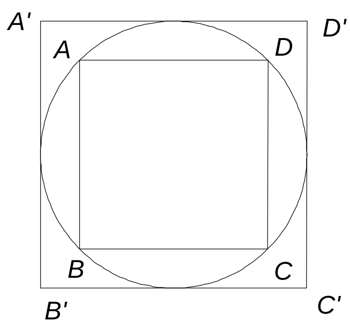
La matemàtica lúdica és un magnífic context de treball, pràcticament a tots els àmbits de la matemàtica. És l'ocasió de citar-ne un dels seus grans mestres, en Martin Gardner:

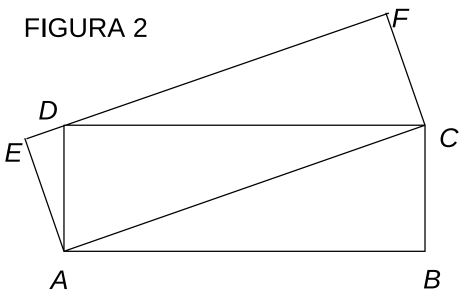
> *"Sempre he cregut que el millor camí per fer les matemàtiques interessants als alumnes i als profans és el que consisteix a apropar-s'hi a través del joc. En nivells superiors, les matemàtiques poden ser mortalment serioses i han de ser-ho. En nivells inferiors, però, no és possible motivar cap alumne a aprendre, per exemple, la teoria de grups, dient-li que la trobarà meravellosa, estimulant o fins i tot útil si algun dia arriba a ser un físic especialitzat en partícules. El millor mètode per mantenir despert un estudiant consisteix segurament a proposar-li un joc matemàtic que l'intrigui, un passatemps, una broma, una paradoxa, un model, un trencaclosques o qualsevol de les mil coses que els professors avorrits solen refusar perquè pensen que són frivolitats."*

S'exposen, a continuació, un parell d'exemples en l'àmbit de la mesura d'àrees:

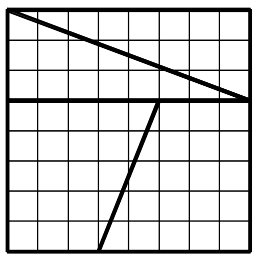
1. Donades les figures *1* i *2* que podeu veure a continuació: a) Quina superfície és més gran, la del quadrat interior o la compresa entre el quadrat interior i el quadrat exterior (fig. *1*); b) Quin rectangle és de superfície més gran? (fig. *2*)

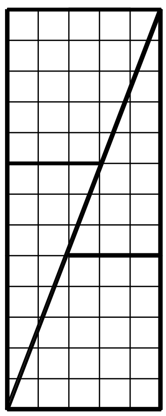
FIGURA 1





2. Observeu les figures següents: a primer cop d'ull les quatre peces en què queden dividits el rectangle i el quadrat són iguals; d’altra banda, el rectangle conté 5x13 = 65 quadradets i el quadrat en conté 8x8 = 64. Què és el que passa? Potser això demostra que 64 = 65?





5.4.4. EQUIVALÈNCIA D’ÀREES

En primer lloc se suggereixen dues activitats relacionades amb el geoplà:

1. Construcció de figures d'àrea equivalent amb el geoplà de 25 punts.

Construïu totes les figures de perímetre 12 que pugueu i calculeu-ne les àrees corresponents.

Indicació: compte! Noteu que podem construir figures de perímetre 12 a base de rectangles o quadradets -que són fàcilment intuïbles-; considereu també, però, les figures que es poden fer amb el triangle pitagòric de costats 3, 4 i 5.

2. Investigació amb el geoplà de 25 punts.

Investigueu la fórmula que dóna l’àrea d’un polígon en funció dels punts que inclou la figura.

Indicació: aquesta fórmula és coneguda com a fórmula o teorema de G. Pick, segons la qual l'àrea d'un polígon en un geoplà és igual al nombre de punts interiors més el nombre de punts frontera menys un.

En segon lloc, es proposen dos problemes de quadratura -la del rectangle i la del triangle equilàter- i un problema de duplicació. Només el darrer problema és senzill. Els altres poden resultar, en general, massa complicats per als alumnes sense ajuts clars i constants. Tot i això, són interessants.

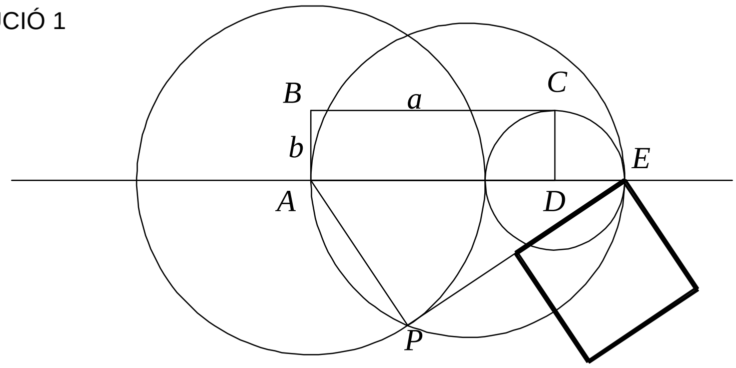
Les construccions es poden fer amb regle i compàs o amb el programa Cabri-Géomètre.

S'ha optat per presentar dues solucions al problema de la quadratura del rectangle. De fet, en tots dos casos es tracta de construir amb regle i compàs el nombre que dóna l'arrel quadrada del producte $a \cdot b$. La primera construcció parteix de consideracions algèbriques, la segona, en canvi, és de caire geomètric i es fonamenta en el teorema de l'altura.

1. Donat un rectangle, construïu un quadrat que tingui la mateixa àrea amb regle i compàs o amb Cabri-Géomètre, cosa que equival a trobar la quadratura del rectangle.

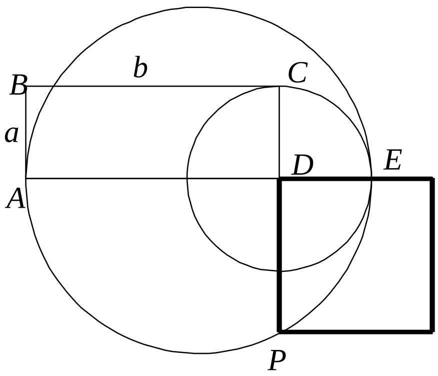
Aquestes en són les dues solucions:

SOLUCIÓ 1



Agafem $AE=a+b$, trobem el punt mitjà M del segment AE i construïm la circumferència de centre M i radi $(a+b)/2$. Aleshores, considerem el triangle rectangle d'hipotenusa $a+b$ i catet a-b ($AP = a$-b = l'altre catet del qual és el doble del costat que cercàvem.

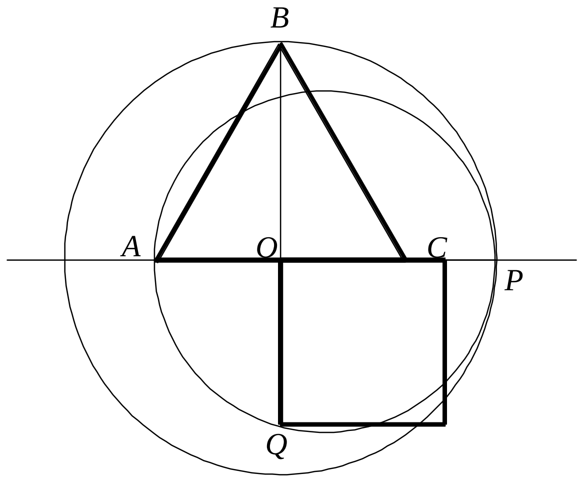
SOLUCIÓ 2



Prenem $AE=a+b$, construïm el punt mitjà d'aquest segment M i tracem la circumferència de centre M per A i E. apliquem el teorema de l'altura al triangle APE.

2. Donat un triangle equilàter construïu un quadrat que tingui la mateixa àrea amb regle i compàs o amb Cabri-Géomètre, cosa que equival a trobar la quadratura del triangle equilàter.

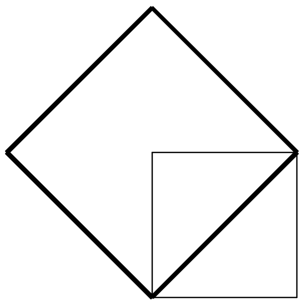
Aquesta n'és la solució:



Transportem l'altura *OB* sobre la recta per *A* i *C*; trobem el punt mitjà *M* del segment *AP* i tracem la circumferència de centre *M* que passa per *A* i *P*. Si apliquem el teorema de l'altura al triangle rectangle *AQP*, constatem que *QP* és el costat del quadrat que cercàvem.

3. Donat un quadrat, dibuixeu amb regle i compàs un quadrat d'àrea doble (això equival a la duplicació del quadrat).

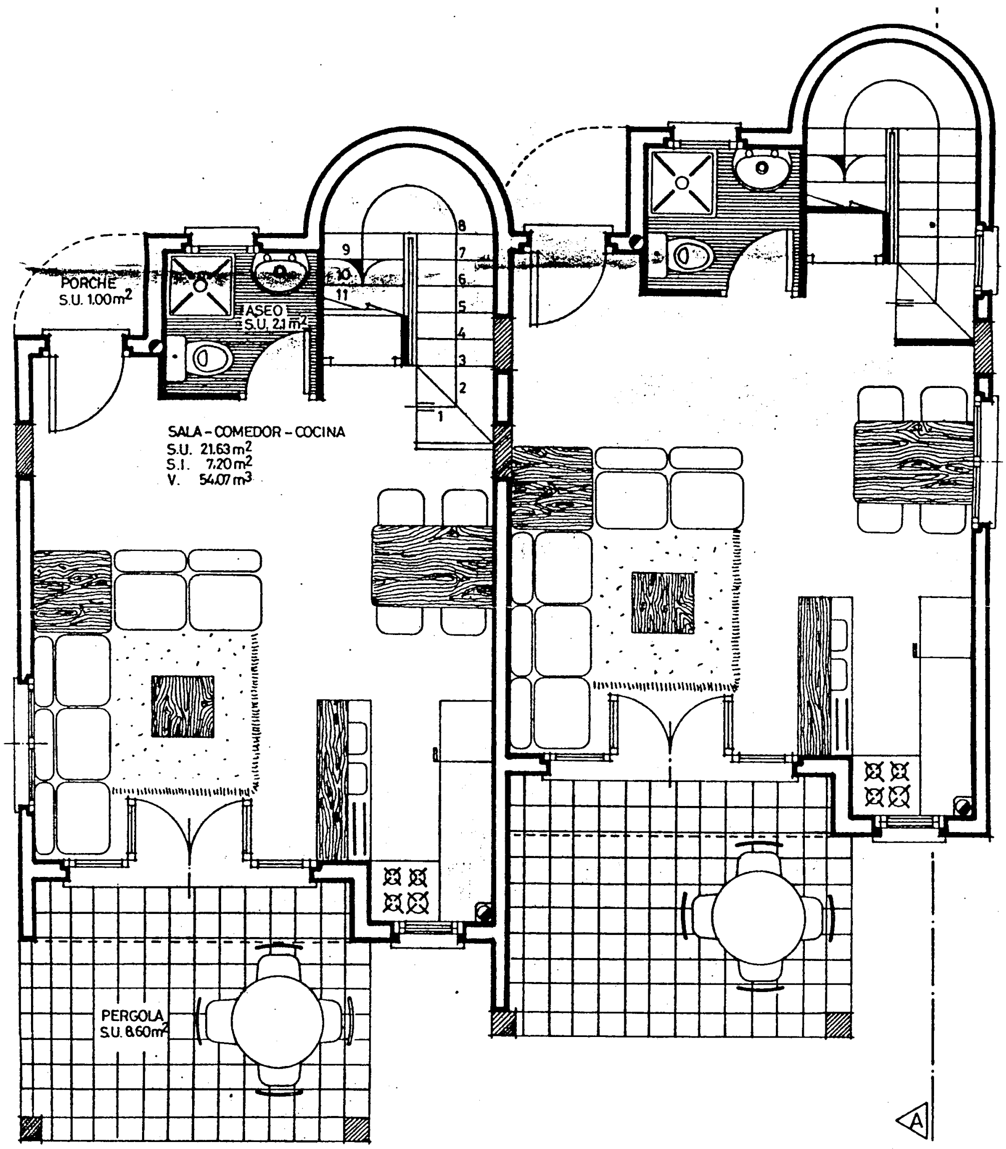
Aquesta n'és la solució:



5.4.5. TREBALL AMB REPRESENTACIONS A ESCALA

Aquest darrer exemple es refereix a les representacions a escala, imprescindibles a la vida quotidiana.

Us han parlat d'un apartament a la vora del mar i esteu interessats a comprar-lo. Només l'heu pogut veure molt de passada, però us ha agradat força. Us han lliurat una fotocòpia una mica malmesa del pla de la casa, que fa constar només les mesures de superfície, però no les mesures lineals. Com podeu esbrinar-les? Quina és l'escala del pla?



PLANTA BAJA

SUP. CONSTRUIDA 32.58m2 (por vivienda)

SUP. PERGOLA 8,60m2 (por vivienda)

Exercicis i activitats proposades

Organitzeu activitats de treball a l'aula d'acord amb les idees o propostes següents:

1. Càlcul de l'àrea del terme municipal del vostre centre d'estudi.

2. Càlcul del volum d'aigua necessària per tal d'omplir una piscina real.

3. Donades les dimensions del corró d'una piconadora i la velocitat que assoleix, estudieu el temps que trigarà a piconar una carretera determinada.

Problemes de geometria

S'afegeixen tres problemes. Com en els capítols anteriors, podreu trobar les solucions a l'annex 3:

Enunciat 8 (teorema de Cross)

Agafeu un triangle qualsevol *T*. Construïu un quadrat sobre cada costat i uniu-ne els vèrtexs lliures. Obtindreu tres triangles més: *T*', *T*'' i *T*'''. Demostreu que els quatre triangles tenen la mateixa àrea.

Enunciat 9

Proveu que l'únic triangle -sigui del tipus que sigui- amb els costats enters i tal que l'àrea coincideix amb el semiperímetre és el de costats 3, 4 i 5.

Enunciat 10

Només hi ha dos triangles pitagòrics les àrees dels quals coincideixin amb els seus perímetres. Trobeu-los.

6. UN COP D'ULL A ALGUNS TEMES

En aquest capítol s'han reunit quatre temes ben diversos que només es tractaran de forma superficial, ja que o no formen part essencial dels currículums o es coneixen a bastament. Es tracta, doncs, d'un capítol amb funcions de calaix de sastre, que permetrà comentar tot un seguit de temes sense necessitat d'aprofundir-hi en excés. En primer lloc, es donen idees sobre els moviments en el pla, a continuació sobre la trigonometria, la geometria analítica plana i les relacions entre àlgebra i geometria i, finalment, es fa una ullada a la història de la geometria.

6.1. IDEES SOBRE ELS MOVIMENTS EN EL PLA

6.1.1. INTRODUCCIÓ

Tot i l'evident interès que tenen les transformacions del pla, tant des d'un punt de vista geomètric com des d'un punt de vista didàctic, durant força temps no han format part explícita dels programes educatius de secundària. Ara, en el primer nivell de concreció, es retroben els moviments en el pla.

Cal constatar que, en canvi, els moviments de l'espai no hi són considerats. Potser caldria pensar si fóra interessant incloure'ls en el currículum variable.

El primer nivell no fa constar que calgui tractar els moviments des d'un punt de vista rigorós. Més aviat cal pensar a fer-hi una aproximació qualitativa, atès que enlloc no es parla de components, ni d'equacions de les transformacions, ni tan sols de composicions.

Tanmateix, sembla francament interessant fer aquesta aproximació intuïtiva als moviments del pla que permetrà, més endavant, processos de formalització sobre una base sòlida.

6.1.2. IDEES I SUGGERIMENTS

6.1.2.1. Classificacions

És interessant poder arribar a fer una classificació dels moviments a partir de l'experimentació i de l'observació (certament, no es podrà ser rigorós):

- Transformacions del pla
  - Moviments rígids
    - Directes
      - Translacions
      - Girs (i simetria central)
    - Inversos
      - Simetries axials
      - Simetries axials compostes amb una translació
  - Homotècies i semblances

Tot i que no cal tractar les afinitats, potser seria convenient citar-les, sempre des d'un punt de vista intuïtiu, com a transformacions del pla que englobarien les anteriors. Poden introduir-se, per exemple, a partir de les ombres dels objectes o de les distorsions que s'obtenen a partir d'un dibuix fet sobre un suport elàstic.

Per tal d'arribar a aquesta classificació, es pot plantejar a l'alumnat un seguit de preguntes com ara:

- Quan diem que dos objectes són iguals?
- Són iguals les dues mans?
- Un objecte i la seva imatge especular són iguals?
- Dos objectes poden tenir la mateixa forma i mides diferents?
- Etc.

A més, es pot fer un treball previ amb el geoplà i amb figures dibuixades o retallades. Per al treball de les simetries, pot ser interessant fer calcs de figures.

6.1.2.2. Forma de treball

A l'hora de tractar cadascun dels moviments es proposen els passos següents:

1. Treball previ intuïtiu.
2. Què es conserva? Com es transformen les figures?
3. Quines propietats s'observen? Hi ha punts fixos?
4. Treball amb Cabri-Géomètre.
5. Recull de conclusions: noció de vector (per a les translacions), angle i centre de gir (per als girs), eix de simetria (per a les simetries axials).
6. Composició de moviments.

L'estudi de les pavimentacions del pla és un excel·lent context per al treball global dels moviments (vegeu l'annex 3).

6.1.3. EXEMPLES DESENVOLUPATS

A continuació es presenten dos exemples per al treball dels moviments amb el programa Cabri.

EXEMPLE 1. CONSTRUCCIÓ D'UNA SIMETRIA AXIAL

Aquesta activitat s'ha de fer amb el programa Cabri-Géomètre (vegeu l'annex 1).
Les indicacions en cursiva són només per al professorat.

Continguts que es treballen amb l'activitat

i) Construcció de punts simètrics;

ii) Construcció de segments simètrics;

iii) Construcció de rectes simètriques;

iv) Construcció de polígons simètrics;

v) Propietats de les simetries axials.

Instruccions per a l’alumnat (part I)

Caldria suprimir del menú l'opció "Punt simètric" abans de fer aquesta part de l'activitat. És possible suprimir qualsevol de les opcions que presenta el programa Cabri-Géomètre amb la instrucció “Opcions, Configuració de les eines”; amb aquest quadre de diàleg obert cal arrossegar la instrucció que es vol suprimir i prémer retrocés. Després es pot recuperar sense problemes la configuració original amb la instrucció “Ajustos originals”. També pot ser convenient afegir una contrasenya per evitar modificacions no desitjades.

1. Dibuixeu una recta i anomeneu-la *s*.

2. Dibuixeu un punt qualsevol *P*.

3. Traceu la perpendicular per *P* a *s* i anomeneu-la *t*.

4. Determineu el punt d'intersecció de *s* i *t*: *P*'. Aquesta és la projecció ortogonal de *P* sobre *s*.

5. Determineu un punt *P*'', situat sobre *t*, de tal manera que la distància *PP*' sigui igual que la distància *P*'*P*''. Aquest és el simètric de *P* respecte a *s*.

6. Elaboreu una macroconstrucció que construeixi punts simètrics respecte a una recta.

7. Poseu a prova la vostra macro amb més punts.

Instruccions per a l’alumnat (part II)

1. Dibuixeu una recta qualsevol *s*.

2. Dibuixeu un triangle qualsevol *PQT*.

3. Trobeu els simètrics dels seus vèrtexs respecte de *s*. Uniu-los i compareu els triangles. Els podeu fer coincidir?

4. Dibuixeu un polígon còncau de 10 costats i anomeneu els seus vèrtexs amb les lletres *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I* i *J*.

5. Trobeu els punts simètrics respecte de *s* i, unint-los i anomenant-los, el polígon simètric.

6. Amideu els costats i els angles dels dos polígons i vegeu-ne les coincidències.

EXEMPLE 2. APLICACIÓ DE LES INSTRUCCIONS DE MOVIMENT DEL PROGRAMA CABRI-GÉOMÈTRE II

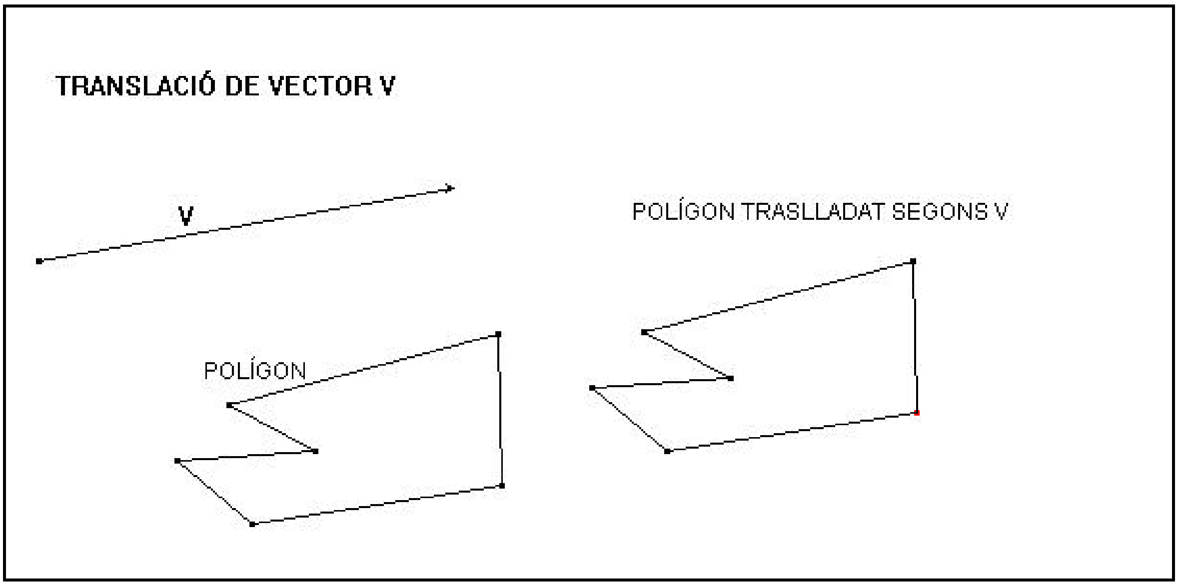
A) Translació de vector *v*

1. Construïu un vector *v*.

2. Construïu un polígon qualsevol.

3. Apliqueu la instrucció *translació* del menú al polígon.

4. Modifiqueu el vector a partir del seu punt d'aplicació i observeu el moviment del polígon.



B) Gir de centre *O* i angle de gir *A*

1. Construïu una circumferència.

2. Agafeu dos punts sobre la circumferència i traceu els radis que determinen.

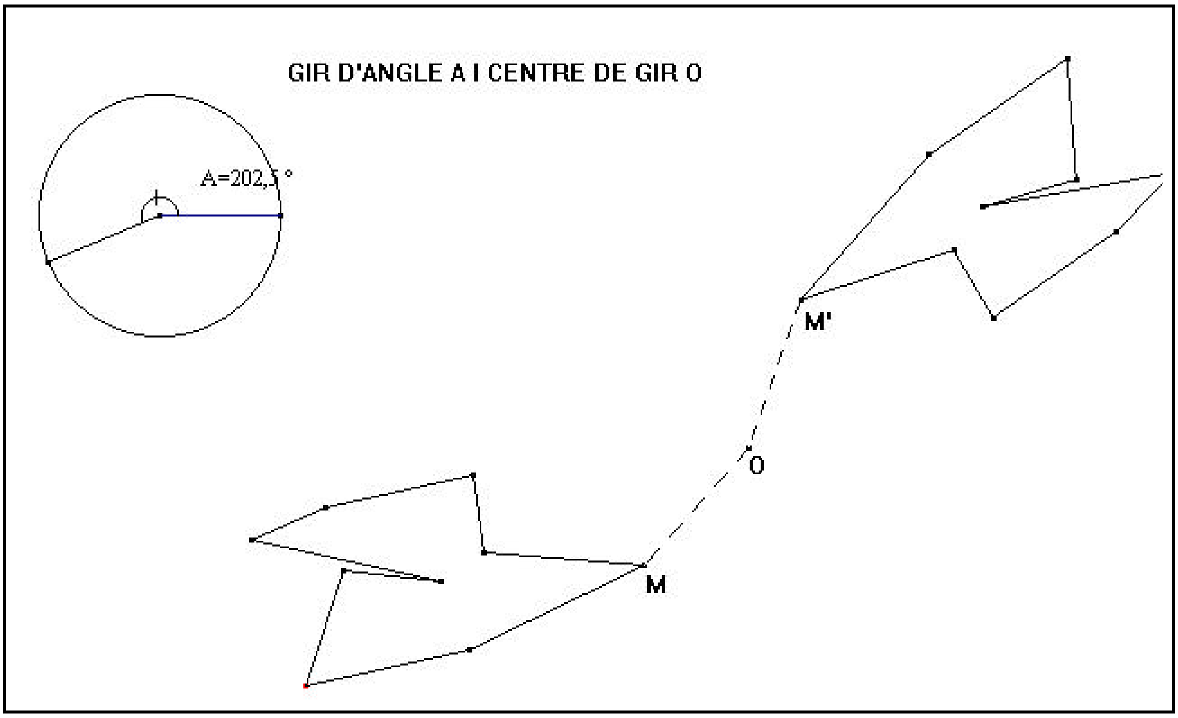
3. Determineu l'angle que formen els dos radis i mesureu-lo en graus sexagesimals.

4. Construïu un punt *O* que serà el centre de gir.

5. Construïu un polígon qualsevol.

6. Apliqueu la instrucció *gir* del menú al polígon.

7. Modifiqueu l'angle de gir movent un dels punts agafats sobre la circumferència i observeu el moviment del polígon.



6.2. TRIGONOMETRIA PLANA

6.2.1. IDEES I SUGGERIMENTS

Només es donen unes breus indicacions que són, en general, de sentit comú:

1. En el treball amb mesures angulars s'hauria de començar directament pels graus sexagesimals, fer servir el transportador d'angles i no atabalar l'alumnat amb les altres mesures angulars fins que no hi hagi dubtes amb la mesura sexagesimal. El treball amb radiants s'hauria de deixar per als batxillerats.

2. Per tal de definir el concepte de raó trigonomètrica, pot ser recomanable que l'alumnat comprovi experimentalment, per exemple amb Cabri-Géomètre, que les proporcions que defineixen les raons trigonomètriques en un triangle rectangle són constants i que no depenen del triangle triat. Després, caldria donar la definició formal en un triangle rectangle i emprar la noció de semblança per tal de veure'n la independència respecte del triangle triat. La circumferència trigonomètrica s'hauria de reservar, potser, per als batxillerats.

3. En el batxillerat és important que els alumnes i les alumnes s'acostumin a treballar amb la circumferència trigonomètrica. En primer lloc, caldrà fer-los veure que les definicions de les raons trigonomètriques que s'obtenen a partir d'aquesta circumferència generalitzen les definicions clàssiques que coneixen de l'ESO. També caldrà que la facin servir per trobar relacions entre les raons de diferents angles -complementaris, suplementaris, etc.- i per deduir fórmules trigonomètriques de reducció al primer quadrant. La memorització d'aquestes fórmules no té cap mena de sentit.

4. És necessari que l'alumnat aprengui a fer ús de la calculadora en sentit directe i també en sentit invers, ja des de l'ESO, i això es pot fer perfectament sense que coneguin les funcions trigonomètriques i les funcions ciclomètriques. En el batxillerat caldrà aprofundir-hi per tal que l'alumnat entengui perfectament les dades que subministra la calculadora.

5. Cal anar amb compte en utilitzar les fórmules trigonomètriques. Si no les han d'emprar sovint, no en veuran la utilitat. Cal donar-ne poques (sinus i cosinus de la suma poden ser suficients), demostrar-les en casos senzills i fer-ne un ús abundós.

6. Si el nombre d'alumnes ho permet, cal fer treball pràctic de camp que aportarà una significació clara a tot el tema.

7. L'alumnat té greus dificultats a l'hora de resoldre equacions trigonomètriques. És necessari que atorgui un significat a les equacions i, per tant, caldrà contextualitzar-les sempre que sigui possible. Cal assegurar l'aprenentatge dels mètodes per resoldre equacions senzilles i per escriure'n les infinites solucions.

8. L'alumnat no sol tenir dificultats a l'hora de resoldre triangles. Les vertaderes dificultats rauen en la traducció d'enunciats o en la modelització matemàtica de situacions reals, fent servir la trigonometria.

6.2.2. RIGOR I DEMOSTRACIONS

Cal ser rigorós quan es fa trigonometria a secundària? Fins a quin punt? Quines fórmules cal demostrar? Quines demostracions serien admissibles? Com s'han d'emprar les notacions?

És convenient que el professorat es faci aquestes preguntes abans d'iniciar la docència d'aspectes relacionats amb la trigonometria. Les respostes no són senzilles. D'una banda, es pot pensar que val la pena sacrificar tot el rigor a la comprensió intuïtiva dels conceptes. D'altra banda, si no s'és rigorós, es poden tergiversar algunes situacions.

A continuació es presenten algunes cites per afavorir aquest debat:

> "Les demostracions matemàtiques, com els diamants, són dures i, a la vegada, clares" (cita de John Locke recollida a "*El universo de las matemáticas*" de William Dunham).
>
> "La demostració és un ídol al davant del qual el matemàtic es tortura" (cita de Sir Arthur Eddington que apareix a *L'enigma de Fermat*).
>
> "La demostració és la cola que manté enganxades totes les matemàtiques" (cita de Michael Atiyah recollida a "*El universo de las matemáticas*" de William Dunham).
>
> "Els matemàtics són coneguts pel fet de ser primmirats i pel fet d'exigir demostracions absolutament precises abans d'admetre cap afirmació" (Simon Singh a *L'enigma de Fermat*).
>
> "Un astrònom, un físic i un matemàtic (es diu) eren a Escòcia de vacances. Per la finestra del tren van veure una ovella negra que pasturava enmig d'un camp. "Que interessant", va observar l'astrònom, "totes les ovelles escoceses són negres!" A la qual cosa el físic va respondre, "No, no! *Algunes* ovelles escoceses són negres." El matemàtic va mirar al cel amb aire suplicant, i va dir: "A Escòcia existeix almenys un camp, que conté almenys una ovella, *un*

dels costats de la qual almenys és negre" (Ian Stewart a *Conceptos de la matemática moderna*).

"S'ha fet totalment impossible traçar una línia entre les matemàtiques i la lògica; de fet, les dues formen una unitat" (cita de Bertrand Russell recollida a *El universo de las matemáticas* de William Dunham).

"Els matemàtics mai no podem posar per escrit el procés complet de raonament en una demostració. Hem d'optar per un resum de la demostració que sigui suficient per convèncer una ment adequadament instruïda" (cita de Bertrand Russell recollida a *El universo de las matemáticas* de William Dunham).

"Una demostració és una argumentació curosament elaborada dins les regles de la lògica, que és irrebatiblement convincent des del punt de vista de la validesa d'una afirmació" (William Dunham a *El universo de las matemáticas*).

"El mètode de *reductio ad absurdum*, que tant complaïa Euclides, és una de les armes més fines que pot emprar un matemàtic. És un gambit molt més formós que qualsevol dels que pot oferir el joc dels escacs. Un jugador d'escacs pot sacrificar un peó o fins i tot una peça, un matemàtic, però, sacrifica *la partida* completa" (G. H. Hardy a *Autojustificación de un matemático,* 1967).

No s'ha de posar en dubte que les demostracions són una part essencial de les matemàtiques. Tanmateix, no és clar que siguin adequades per a secundària. És possible que l'alumnat no entengui les demostracions i, fins i tot, que no entengui la necessitat ni l'interès de demostrar les coses. Hi ha el risc que la insistència en les demostracions provoqui un efecte advers, de rebuig, d'incomprensió que els porti a dubtar de les seves capacitats.

D'altra banda, potser s'ha de tenir en compte que la necessitat de demostrar, que té una gran tradició a occident i que ara mateix ens sembla consubstancial amb les matemàtiques, no ha estat sempre considerada. Els antics matemàtics orientals de la Xina i de l'Índia no veien per què calia demostrar les coses. Quan trobaven una "veritat" matemàtica es limitaven a admirar-la, com una obra d'art, com un poema.

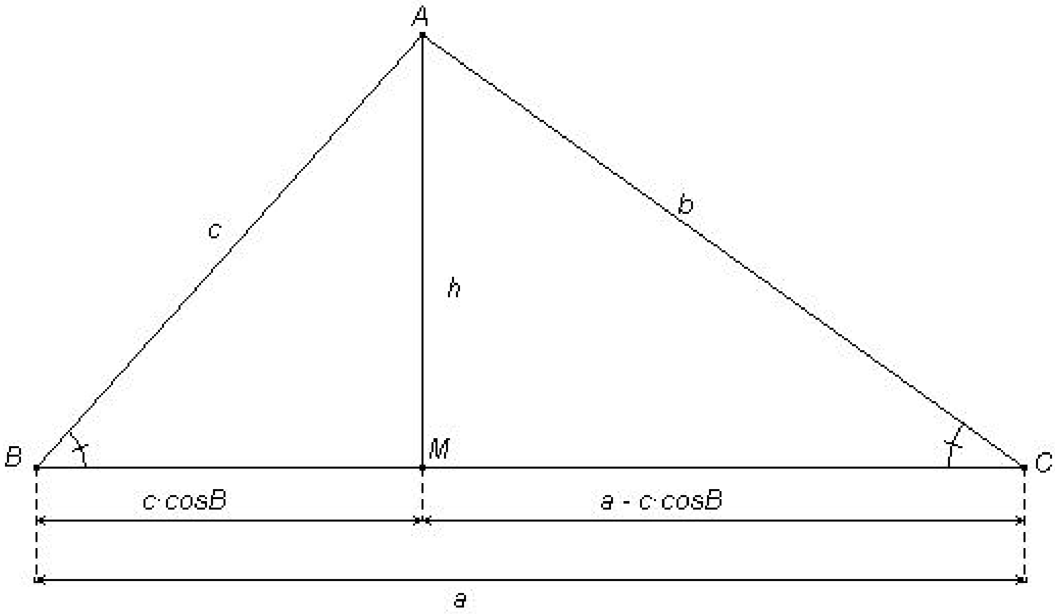
Sembla clar també que el professorat haurà de distingir entre l'ESO i el batxillerat. A l'etapa obligatòria, la tipologia de l'alumnat i la seva maduració porten a pensar que no té gaire sentit fer demostracions ni exigir rigor en les notacions. Al batxillerat també serà convenient distingir entre l'alumnat de les opcions de ciències i l'alumnat de les opcions de socials.

En qualsevol cas sembla aconsellable donar unes primeres passes en aquest àmbit mental que és part cabdal de l'activitat matemàtica, i la trigonometria pot ser un context excel·lent per fer-ho.

Quan s'han de fer demostracions a trigonometria, el professorat s'ha de plantejar si val la pena fer servir el concepte de producte escalar de dos vectors o no.

Vegem, per exemple, dues demostracions del teorema del cosinus. La primera només fa servir el teorema de Pitàgores i la definició clàssica de cosinus. La segona es fa a partir de la noció de producte escalar de dos vectors.

Demostració A



Apliquem el teorema de Pitàgores al triangle rectangle *AMC*:

$$b^2 = h^2 + (a - c \cdot \cos \widehat{B})^2 = h^2 + a^2 + c^2 \cdot \cos^2 \widehat{B} - 2ac \cdot \cos \widehat{B}$$

Apliquem el teorema de Pitàgores al triangle rectangle *AMB* per tal de calcular h^2:

$$h^2 = c^2 - c^2 \cdot \cos^2 \widehat{B}$$

Substituïm a la primera expressió:

$$b^2 = h^2 + a^2 + c^2 \cdot \cos^2 \widehat{B} - 2ac \cdot \cos \widehat{B} = c^2 - c^2 \cdot \cos^2 \widehat{B} + a^2 + c^2 \cdot \cos^2 \widehat{B} - 2ac \cdot \cos \widehat{B} =$$
$$= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B}$$

Concloem, doncs que:

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B}}$$

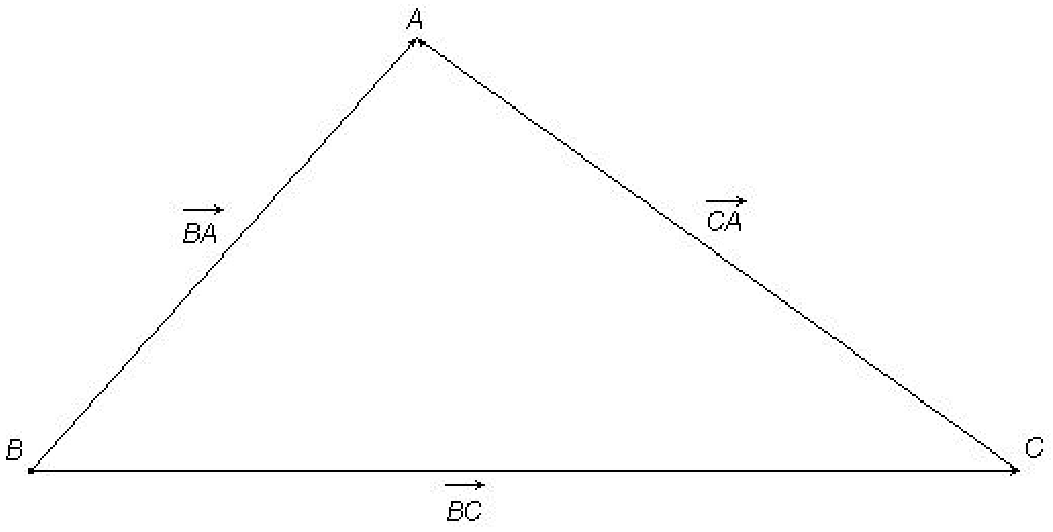
Demostració B

Considerem els vectors definits pels costats i les seves normes:

$$\left\| \overrightarrow{CA} \right\| = b;\ \left\| \overrightarrow{BA} \right\| = c; \left\| \overrightarrow{BC} \right\| = a;$$ (vegeu el dibuix a la pàgina següent)

Tenim la igualtat vectorial:

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$$



Volem calcular el quadrat de la norma del vector $\overrightarrow{CA}$:

$$b^2 = \left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2 = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CA} = \left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} =$$
$$= c^2 + a^2 - 2ca\cdot\cos\widehat{B}$$

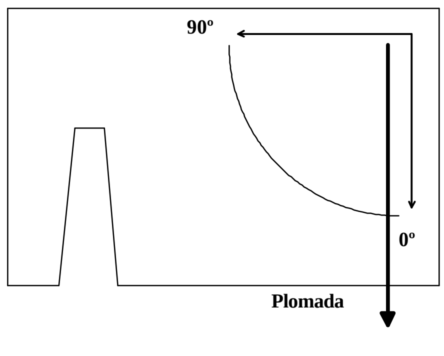
Per tant:

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\widehat{B}}$$

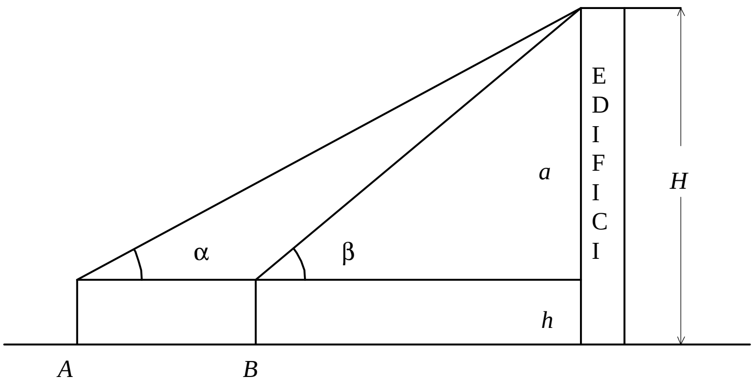
Tot i que la segona demostració es pot considerar més elegant o més adequada a la matemàtica axiomàtica, una gran majoria dels alumnes només entendran la primera. Cal pensar, doncs, que a secundària seria preferible fer servir arguments elementals sempre que sigui possible.

6.2.3. UN EXEMPLE DE TREBALL DE CAMP

Per fer treball de camp l'ideal és disposar de teodolits (n'hi ha d'ús estrictament didàctic que són prou econòmics). Si això no és possible, l'alumnat pot construir instruments per mesurar angles: només cal un cercle graduat i una plomada. L'instrument, tot i ser rudimentari, permet fer mesures correctes.



Amb una cinta mètrica i el petit quadrant construït pels alumnes, es pot sortir a observar algun edifici del qual es vulgui esbrinar l'altura. Es resolen els triangles rectangles de l'esquema amb les dades obtingudes a l'observació -α, β, h i la distància entre A i B:



En primer lloc es calcula a i s'obté, finalment: $H = a + h$.

Pot resultar molt interessant utilitzar eines estadístiques, estudiar els errors comesos per alguns alumnes o grups d'alumnes en les seves mesures i reflectir la importància d'un treball científic, apuntar tot el que es fa per deduir després els possibles errors, ser meticulós amb la feina, presentar els resultats, etc.

6.3. GEOMETRIA I ÀLGEBRA I GEOMETRIA ANALÍTICA

6.3.1. INTRODUCCIÓ

La geometria analítica va irrompre amb força en el món de les matemàtiques en el segle XVII amb les aportacions que van fer Descartes i Fermat. Tot i que caldria repartir el mèrit a parts iguals, va ser el primer qui es va perpetuar com el pare de la geometria analítica, sobretot a causa de la gran difusió de les seves obres.

Descartes va publicar el *Discurs del Mètode* l'any 1637 amb un apèndix titulat *Geometria*. Descartes hi diu:

> "*Tot problema de geometria es pot reduir fàcilment a termes tals que un coneixement de les longituds de certes rectes és suficient per a la seva construcció... I no dubtaré a introduir aquests termes aritmètics a la geometria.*"

L'ús de coordenades era ja habitual en cartografia des de feia segles. La genialitat de Fermat i de Descartes fou la de traspassar aquesta idea a la geometria.

En les darreres dècades, fonamentalment a causa del menyspreu per als *Elements* d'Euclides, que es veien com una branca morta de la geometria, per part d'algunes escoles de matemàtics, vam assistir a la preponderància absoluta de la geometria analítica en els programes de secundària. Així, l'àlgebra va engolir la geometria inopinadament.

Ara mateix, amb els nous programes de secundària obligatòria de la LOGSE i de la LOCE, la situació ha canviat força, fins al punt que en el primer nivell de concreció trobem poca geometria analítica. Aquesta part de les matemàtiques es reserva fonamentalment per als alumnes dels batxillerats de ciències.

Tot això no treu que l’etapa de secundària obligatòria és un excel·lent moment per començar a descobrir els lligams entre l’àlgebra i la geometria.

6.3.2. IDEES I SUGGERIMENTS

Com en el cas de la trigonometria, només es donen unes breus indicacions per al tractament de la geometria analítica i dels lligams entre la geometria i l’àlgebra:

1. És molt important que l’alumnat d’ESO s'acostumi a traduir problemes geomètrics al llenguatge algebraic. A més, la geometria pot proporcionar un context idoni per al treball amb equacions i sistemes de primer i segon grau.

2. Pot ser interessant fer veure als estudiants que els geòmetres grecs no tenien les versions algebraiques dels problemes i dels teoremes que es tenen ara i que, d'aquesta manera, tot és molt més fàcil.

3. La introducció del concepte d’equació d’una recta pot fer-se des de tres vies, que són compatibles:

   a) a partir de la relació de dependència lineal i afí entre variables;

   b) directament a partir de les coordenades dels punts (vegeu l’exemple del 6.3.3);

   c) a partir de la noció de coordenades i de la de vector.

   En qualsevol cas, el lligam entre les tres versions s’hauria de treballar força.

4. Els conceptes fonamentals de la geometria analítica plana són:

   a) el de coordenades d’un punt;

   b) el de vector lliure determinat per dos punts;

   c) el que permet relacionar l’equació d’una recta amb un conjunt de punts.

5. Cal tenir en compte la confusió habitual entre coordenades d’un punt i components d’un vector.

6. Caldrà parar una atenció constant a la traducció algèbrica de les situacions geomètriques i també al procés invers, de traducció geomètrica de les situacions algèbriques. Certament, la resolució gràfica de sistemes lineals s'ha de considerar també del màxim interès a l'hora de relacionar la geometria i l'àlgebra.

7. El programa Cabri pot ser un instrument complementari excel·lent per al treball de la geometria analítica plana.

8. En el batxillerat sembla aconsellable fer un treball intens amb vectors -del pla (a primer) i de l'espai (a segon)- que donarà molta agilitat per resoldre tota mena de situacions geomètriques.

9. La distinció entre geometria afí i geometria mètrica, i el treball amb sistemes de referència no ortonormals no és essencial en aquesta etapa.

10. El concepte de pendent d'una recta i el treball amb l'equació punt-pendent són especialment importants ja que permetran afrontar el concepte de derivada amb més seguretat.

11. La geometria de l'espai comporta més dificultats ja que alguns alumnes no tenen desenvolupada prou àmpliament la seva imaginació espacial. L'ús de la mateixa aula com a espai d'exemplificació pot donar bons resultats.

12. En el cas de la geometria de l'espai, caldrà tenir en compte que l'analogia amb la geometria plana pot portar a confusions a alguns alumnes. Quan s'estigui treballant la geometria de l'espai convindria, a ser possible, intercalar algun exercici de geometria plana que permeti fer les comparacions i les distincions que calgui.

13. Com en el cas de la geometria plana, és essencial treballar la traducció del llenguatge algèbric al llenguatge geomètric i viceversa. La interpretació geomètrica dels sistemes lineals amb tres incògnites comporta greus dificultats per a una majoria d'alumnes. És necessari fer un treball específic amb força exemples.

6.3.3. EXEMPLES

6.3.3.1. Punts i coordenades. Introducció intuïtiva a la idea d'equació d'una recta en el pla

(La introducció de coordenades s'hauria de relacionar amb la cartografia per fer-la més entenedora a l'alumnat.)

1. Representeu els punts de coordenades (1,3) ; (2,6) ; (4,12) ; (-1, -3) i (-3, -9).

2. Què observeu? Esmenteu altres punts, explicitant les seves coordenades, amb els quals els pugueu relacionar.

3. Representeu els punts (1,2) i (2,4) i dibuixeu la recta que determinen. Calculeu gràficament sis punts més d'aquesta recta. Quina relació observeu entre les coordenades x i y? Com l'escriuríeu en forma d'equació?

4. La recta de l'apartat 1 també reuneix els punts que compleixen una mateixa equació. Quina és aquesta equació?

5. Representeu les rectes dels apartats anteriors en un mateix sistema de coordenades. A quin punt es tallen? Podríeu haver conegut aquest punt sense haver fet el dibuix?

A continuació, caldria repetir processos similars per a rectes amb terme independent no nul, per tal d'anar a parar a la noció d'equació d'una recta en el pla.

6.3.3.2 Dos exemples amb Cabri

Aquestes activitats es poden fer amb alumnat de primer de batxillerat: la primera té l'objectiu que els alumnes coneguin alguns dels instruments que els ofereix el programa; la segona consisteix a resoldre alguns exercicis i problemes amb l'ajut del programa. Es donen les representacions corresponents a la primera activitat i al primer problema.

A) Reconeixement dels instruments del programa

1. Empreu la instrucció *mostrar eixos* del menú per fer aparèixer els eixos de coordenades cartesianes.

2. Empreu la instrucció *definir quadrícula* del menú per fer aparèixer la quadrícula de punts amb coordenades enteres (compte: després de seleccionar la instrucció, cal seleccionar els eixos de coordenades amb el punter per fer aparèixer la quadrícula).

3. Construïu la recta r que passa pels punts A = (-1,2) i B = (4,0).

4. Amb la instrucció *equació i coordenades* del menú trobeu l'equació de la recta i les coordenades dels punts.

5. Desplaceu els punts amb el punter i observeu els canvis a l'equació de la recta.

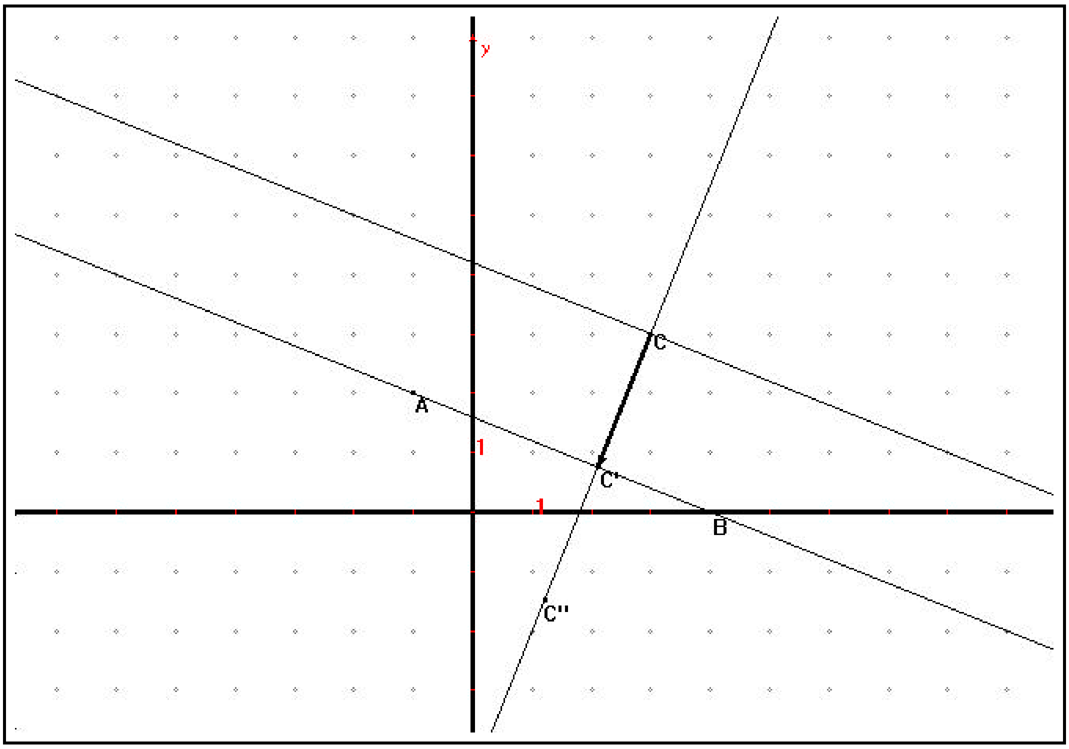
6. Torneu a la situació inicial: A = (-1,2) i B = (4,0). Dibuixeu el punt C = (3,3) i traceu la recta s paral·lela a r per C i la recta t perpendicular a r per C.

7. Determineu el punt d'intersecció de les rectes r i t: aquesta és la projecció ortogonal C' de C sobre r.

8. Calculeu el punt simètric C'' de C respecte de r (amb la instrucció *simetria axial* del menú), calculeu el vector $\overrightarrow{CC'}$ i comproveu que es compleix la igualtat: $C'' = C' + \overrightarrow{CC'}$.

(Vegeu-ne la representació a la pàgina següent)

Representació (parcial) d'aquesta activitat



B) Resolució de problemes amb Cabri

Resoleu els problemes següents amb l'ajut del programa Cabri. Tingueu en compte que en algun dels apartats és possible que hagueu de fer càlculs abans de poder dibuixar. A continuació feu la resolució analítica del problema.

1. Donats els punts $A = (2,1)$, $B = (-2,2)$ i $C = (0,-2)$ es demana que:

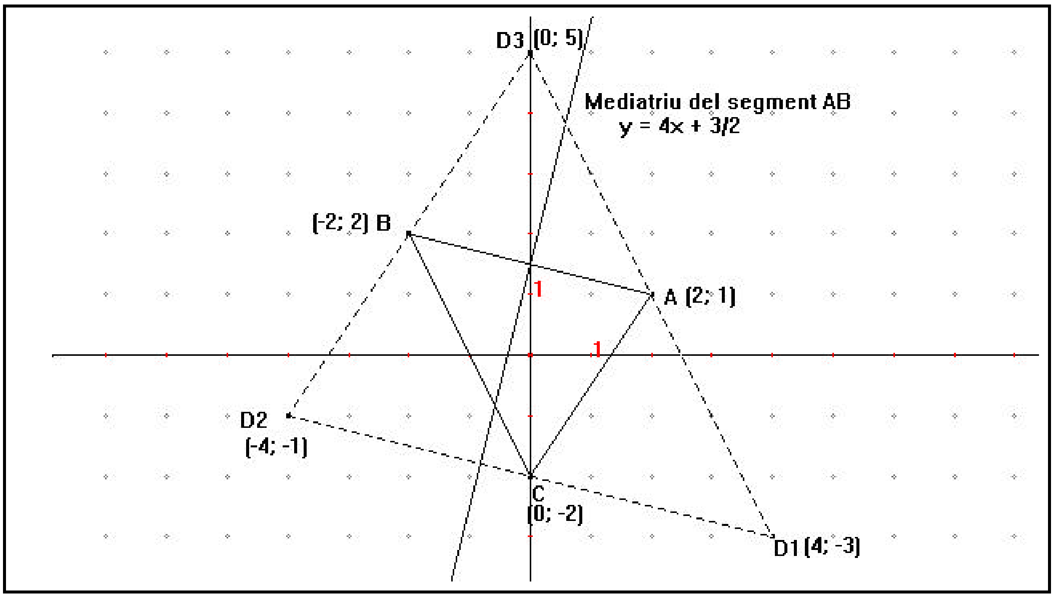
a) Dibuixeu la mediatriu del segment AB i en calculeu l'equació explícita.

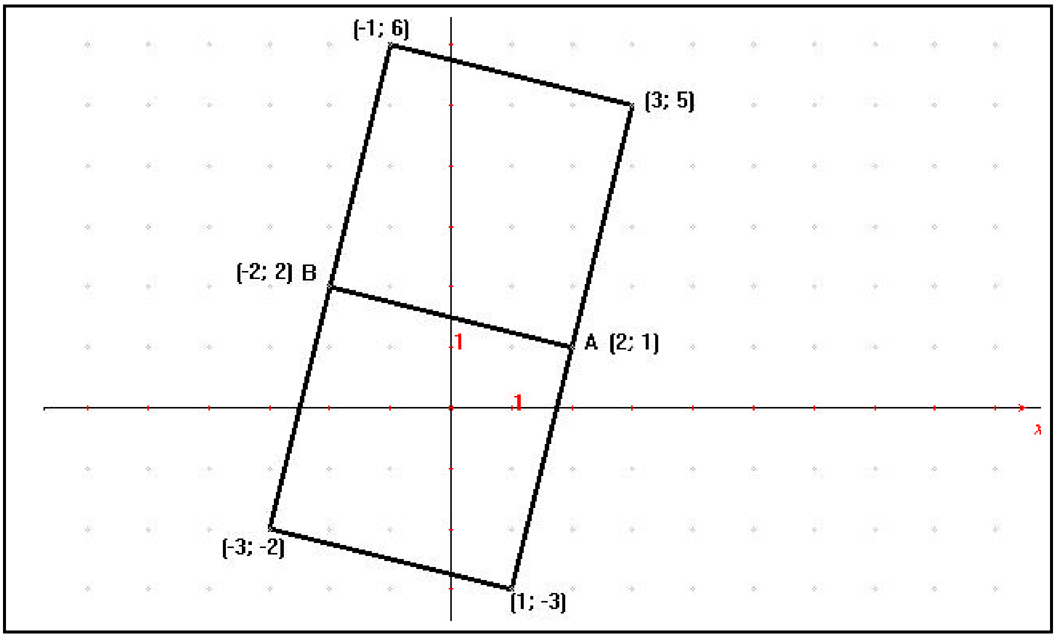
b) Trobeu els tres punts D_1, D_2 i D_3 que formen paral·lelograms amb A,B i C.

c) Feu un nou dibuix i trobeu els punts que formen quadrats amb A i B.

(Vegeu-ne la representació a la pàgina següent)

Representacions corresponents a aquest problema





2. Donats els punts $A = (1,2)$, $B = (-1, 3)$ i $C = (0,-5)$ es demana que:

a) Dibuixeu la mediatriu del segment AB i en calculeu l'equació general.

b) Trobeu l'ortocentre, el circumcentre i l'incentre del triangle *ABC*.

c) Trobeu l'àrea del triangle *ABC*.

d) Trobeu les equacions de les rectes que contenen els costats del triangle *ABC*.

e) Calculeu $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

3. Donada la circumferència d'equació $x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0$ trobeu:

a) El centre i el radi. Representeu-la.

b) L'equació de la recta tangent pel punt (0,0).

c) L'equació d'una circumferència concèntrica que sigui tangent a la recta $x + y = 4$.

d) Les interseccions d'aquesta circumferència amb la circumferència de centre $A=(1,1)$ i radi $r=\sqrt{2}$.

4. La circumferència C passa pels punts (1,1) i (-2, 4). Si sabem que el seu centre és sobre la recta r: $x+y = 4$, determineu-ne l'equació. Representeu gràficament la situació.

6.3.3.3. Problemes amb traducció algèbrica

Es proposen, a continuació, exemples típics d'enunciats que admeten una resolució algebraica després d'un treball geomètric:

1. El perímetre d'un triangle rectangle és de 30 cm i la hipotenusa és de 13 cm. Trobeu els catets i l'àrea.

2. Calculeu les mitjanes d'un triangle rectangle isòsceles d'hipotenusa $2\sqrt{2}$ m.

3. L'àrea d'un triangle rectangle és de 120 cm^2 i la hipotenusa és de 26 cm. Trobeu els catets.

4. En un triangle rectangle un catet mesura 5 cm i l'altura relativa a la hipotenusa 3 cm. Calculeu la hipotenusa i l'altre catet.

5. L'altura relativa a la hipotenusa d'un triangle rectangle la divideix en dos segments de 28 cm i 7 cm. Trobeu els catets i l'àrea.

6. El perímetre d'un triangle rectangle és de 24 cm i el radi del cercle inscrit mesura 2 cm. Trobeu els catets.

7. La base BC d'un triangle isòsceles mesura 42 cm i el costat AB, 35 cm. Trobeu les altures i les mitjanes del triangle.

8. L'apotema d'un triangle equilàter mesura 8 cm. Trobeu el perímetre i l'àrea del triangle.

9. S'inscriu un triangle *ABC* en una circumferència de radi 5 de forma que *AB* és el costat del triangle equilàter inscrit i *BC* el de l'hexàgon. Trobeu els angles *A*, *B* i *C*, classifiqueu el triangle i calculeu l'àrea.

10. Un triangle isòsceles té 6 cm de base i l'altura corresponent a un costat igual mesura 4,8 cm. Calculeu-ne l'àrea.

11. Calculeu l'àrea d'un triangle equilàter sabent que la suma de la base i l'altura és de 10 m.

12. Calculeu els costats d'un rectangle sabent que la seva àrea és 168 cm^2 i que la diagonal mesura 25 cm.

13. Trobeu les diagonals d'un rombe de 5 m de costat i 24 m^2 d'àrea.

14. Els costats d'un paral·lelogram mesuren 51 m i 24 m. La diagonal petita és perpendicular al costat menor. Calculeu:

a) La diagonal menor.

b) L'àrea del paral·lelogram.

c) La distància entre els costats majors.

d) La distància entre els costats menors.

15. Les diagonals d'un trapezi rectangle mesuren 26 m i 30 m i la seva altura 24 m. Trobeu:

a) La seva àrea.

b) Les longituds dels segments en què les diagonals queden dividides pel punt d'intersecció.

6.4. HISTÒRIA DE LA GEOMETRIA

6.4.1. INTRODUCCIÓ

Tradicionalment, a les classes de matemàtiques s'incideix molt poc en la gènesi històrica dels conceptes. Això contribueix a donar una visió monolítica i estàtica de les matemàtiques que no s'adiu amb la realitat. És necessari que l'alumnat sigui conscient de l'evolució històrica de la geometria per tal que en tingui una imatge dinàmica que li permeti veure, a més, que no és una matèria tancada. En aquest sentit, és convenient fer una mica de divulgació, amb l'objectiu que els alumnes coneguin aspectes de la geometria i de les matemàtiques encara que sigui sense aprofundir-hi, com és el cas, per exemple, de les geometries no euclidianes.

6.4.2. IDEES I SUGGERIMENTS

Només s'apunten dues idees molt senzilles:

1. Treballar la història a partir d'activitats i de lectures. No cal pensar, doncs, a fer classes magistrals d'història de les matemàtiques que poden ser poc aprofitades pels alumnes.

2. No fer tota la història de cop, anar-la treballant dins de cada tema. Preneu, com a exemple, el cas exposat en el capítol 3, apartat 3.3.1, relatiu a la inscripció de polígons regulars.

6.4.3. EXEMPLES

Es donen, a continuació, tres exemples de lectures. Estan pensats per a alumnes de 4t d'ESO o de 1r de batxillerat. Alguns apartats es poden fer de forma activa fent ús del regle i del compàs o del programa Cabri-Géomètre, per exemple, la primera part de la primera lectura, que es refereix a la bisecció i trisecció del segment, i a la duplicació del quadrat. Si només se'n fa la lectura amb explicacions, tot tindrà un caràcter molt més superficial. En qualsevol cas, és evident que el professor haurà d'aclarir els dubtes que sorgeixin i, si és possible, oferir exercicis i exemples que ho aclareixin.

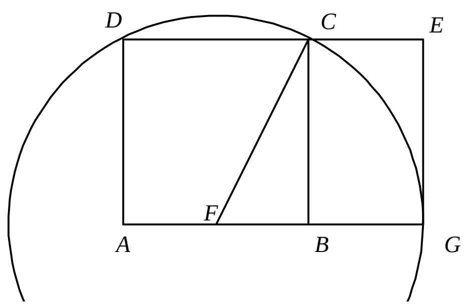
Exemple 1: La història de tres problemes sense solució

Per als geòmetres grecs fer geometria volia dir fer construccions amb regle i compàs. Amb aquests instruments van resoldre molts problemes com ara els següents:

- -la bisecció del segment i de l'angle;
- -la trisecció del segment;
- -la duplicació del quadrat;
- -la quadratura del rectangle;
- -la construcció del rectangle d'or.

Els alumnes poden resoldre aquests problemes amb regle i compàs o amb Cabri-Géomètre.

Aquí teniu, per exemple, la construcció de l'anomenat rectangle d'or, que segons els grecs de l'antiguitat és el rectangle més harmoniós que existeix: partim del quadrat *ABCD*, a continuació prenem el punt mitjà *F* del segment *AB* i tracem la circumferència de centre *F* i radi *FC*; aquesta circumferència talla la recta que passa pel costat *AB* del quadrat en el punt *G* i ja tenim el rectangle d'or *AGED*.



En aquest rectangle es compleixen les relacions:

$$AB = AG\left(\frac{\sqrt{5}\ -1}{2}\right)$$

i, equivalentment:

$$AG = AB\left(\frac{\sqrt{5}\ +1}{2}\right)$$

De manera natural es van plantejar els problemes següents, que van tenir ocupats els matemàtics al llarg de més de 2000 anys sense que se'n trobés la solució:

1. **La trisecció de l'angle**, és a dir, la divisió d'un angle donat en tres parts iguals.

2. **La duplicació del cub**, és a dir, obtenir un cub de volum doble del d'un cub donat.

   La llegenda explica la història següent: a partir de l'any 427 a.C. una terrible pesta va assolar Grècia fins a causar la mort de la quarta part de la població d'Atenes -entre les víctimes hi havia, segons sembla, Pèricles. Per tal de conjurar la malaltia, els atenesos varen recórrer a l'oracle d'Apol·lo a Delfos. L'oracle els va demanar que dupliquessin l'altar cúbic que hi havia en aquells moments. Els atenesos van duplicar les dimensions de l'altar i, per sorpresa de tots ells, va resultar vuit vegades més gran que l'inicial. Així va néixer aquest problema clàssic.

3. **La quadratura del cercle**, és a dir, la construcció d'un quadrat d'àrea igual a la d'un cercle donat.

Els grans matemàtics i geòmetres grecs no van veure que es tractava de problemes sense solució. De fet, això no va ser possible fins més de dos mil anys més tard. Durant molt de temps, doncs, aquests tres reptes van desafiar les ments més privilegiades. A principi del segle passat, un jove francès de poc més de vint anys, Evarist Galois (1811-1832), va trobar-ne per fi la solució: aquestes construccions no es poden fer amb regle i compàs per més que ens hi escarrassem. No va ser gens fàcil provar això; cal dir que la genial feina del jove Galois no hauria estat possible sense les aportacions de molts predecessors i coetanis, especialment D'Alembert, Gauss, Lagrange, Ruffini i Abel.

Just abans del duel fatal en què va trobar la mort, Galois va formular i escriure en el decurs d'una nit els seus descobriments més importants i els va trametre, com a testament, al seu amic O. Chevalier perquè els publiqués en cas d'un final tràgic.

La carta va ser publicada tot just després de la mort d'Evarist Galois; les idees que s'hi recollien, però, no van tenir les repercussions i el reconeixement que es mereixien fins que el 1846 Liouville (1809-1882) va desxifrar i publicar tots els treballs de Galois.

La teoria de Galois, aparentment, era ben lluny dels problemes geomètrics que havien plantejat els grecs i es referia a la resolució d'equacions. Els nombres queden classificats en algebraics i transcendents segons siguin o no solució d'equacions a coeficients enters. Només alguns nombres algebraics són construïbles amb regle i compàs: els que són solucions d'equacions amb coeficients racionals de grau 1 o 2^k, amb k natural. Entre aquests no s'hi compten les solucions dels tres problemes clàssics exposats anteriorment.

Vegem-ho amb una mica més de detall:

1. La quadratura del cercle equival a resoldre l'equació: $\pi R^2 = x^2 \Leftrightarrow x = R\sqrt{\pi}$.

El nombre π hauria de ser, doncs, construïble amb regle i compàs per tal que la quadratura fos realitzable, i això és impossible ja que no és ni tan sols algebraic. La transcendència de π no va ser demostrada fins el 1882 per Ferdinand Lindemann (1852-1939).

2. La duplicació del cub, algebraicament, equival a resoldre l'equació $x^3 = 2a^3$, que és equivalent a resoldre $x = a\sqrt[3]{2}$. El nombre $\sqrt[3]{2}$ és algebraic, però no és solució de cap equació de grau 1 o 2^k a coeficients racionals i no es pot dibuixar amb regle i compàs.

3. La trisecció de l'angle, per exemple de 60º, equival a resoldre l'equació $8x^3 - 6x - 1 = 0$ que no és reductible a equacions de segon grau o de primer grau resolubles.

Efectivament, trisecar l'angle de 60º equival a representar el punt del pla (cos 20º, sin 20º) sobre la circumferència unitat. Si posem y = 20º, es complirà $\cos 3y = 1/2$ i desenvolupant aquesta expressió:

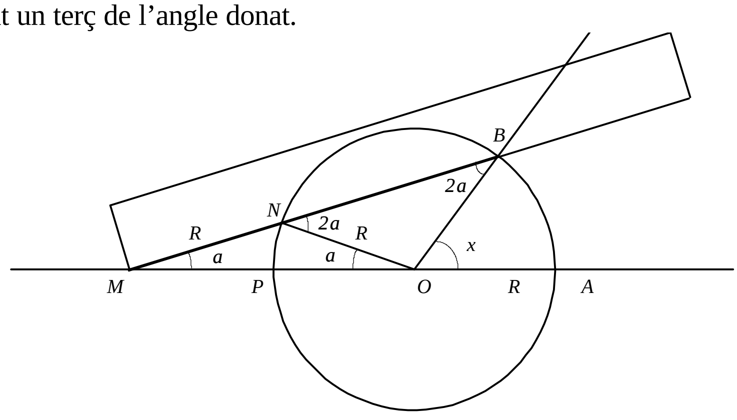
$$\cos 3y = \cos(2y + y) = \cos 2y \cos y - \sin 2y \sin y = (\cos^2 y - \sin^2 y)\cos y - 2\sin y \cos y \sin y =$$
$$= \cos^3 y - \sin^2 y \cos y - 2\sin^2 y \cos y = \cos^3 y - 3\sin^2 y \cos y = \cos^3 y - 3(1 - \cos^2 y)\cos y =$$
$$= 4\cos^3 y - 3\cos y = 0'5$$

Si fem $\cos y = x$ i multipliquem per dos, obtenim l'equació $8x^3 - 6x - 1 = 0$.

De fet, tot i el mèrit global de Galois, s’ha de dir que la impossibilitat de la trisecció va ser provada específicament el 1837 pel jove francès de 23 anys Pierre Laurent Wantzel (1814-1848) en un memorable article de set pàgines aparegut en el *Journal des mathématiques pures et apliquées* que portava el títol *Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de Géométrie peut se resoudre avec la règle et le compas*. Wantzel demostrà que les irracionalitats cúbiques no eren del cos dels racionals ni dels cossos extensió obtinguts per adjunció d’irracionals quadràtics -els únics nombres construïbles amb regle i compàs- i va obtenir, com a corol·lari, la impossibilitat de la trisecció.

Tanmateix, gairebé 2000 anys abans, el genial Arquimedes de Siracusa tenia un mètode per trisecar angles “amb regle i compàs” que “funcionava” (i encara “funciona”) a la perfecció:

Si es vol trisecar l’angle *AOB*, es traça la circumferència de radi *R* i centre *O* i es marca, amb el compàs, aquest radi sobre el regle. A continuació, es recolza el regle sobre el punt *B* i desplaçant-lo fins a aconseguir els punts *M* (sobre la recta que passa per *OA*) i *N* (sobre la circumferència), de tal manera que *MN=R*. Aleshores, l’angle *ONP* que s’ha obtingut és exactament un terç de l’angle donat.



Efectivament, el triangle *OMN* és isòsceles per construcció i, així, l'angle en *O* també és α i l'angle en *N* és 180º-2α. Aleshores, en el triangle *ONB*, que també és isòsceles, es té: angle en *N* =2α= angle en *B* i angle en *O*=180º-4α. Finalment, s'obté l'angle *x* en funció del construït α:

$$x = 180º-(\alpha+ 180º-4\,\alpha) = 3\alpha.$$

Així és com el geni de Siracusa trisecava angles. El cert és que Arquimedes era perfectament conscient de "l'abús" que feia del regle.

Exemple 2: El naixement de les altres geometries

Fins a cert punt, es pot dir que la primera definició de geometria és d'Euclides. Efectivament, és el primer matemàtic que la presenta com un sistema axiomàtic.

Euclides parteix d'una sèrie de definicions bàsiques i conceptes inicials intuïtius, formula un seguit de postulats o axiomes dels sistema no demostrables i, finalment, demostra teoremes i proposicions a partir de la base anterior.

Entre els axiomes que proposa Euclides com a indemostrables, n'hi ha un, el cinquè (el que diu que per un punt exterior a una recta només passa una paral·lela), que es va qüestionar força aviat, sobretot, pel fet que en la formulació inicial d'Euclides, es parlava de "perllongar indefinidament una recta", la qual cosa no es veia gaire clara.

Ptolemeu (85-165) i Procles (410-485) són els primers matemàtics a furgar-hi: pensen que les rectes paral·leles podrien tenir un comportament asimptòtic de manera que tot fallaria.

Es va començar a intentar demostrar el 5è postulat a partir dels quatre primers. Se'n van donar moltes versions equivalents (com ara la que s'ha esmentat abans), però no es va reeixir a donar-ne una autèntica demostració.

El primer matemàtic que va intentar negar el 5è postulat va ser l'italià Girolamo Saccheri (1667-1773). La seva intenció, tot cal dir-ho, era la de reivindicar Euclides tot i arribant a un absurd que confirmés, doncs, la validesa del 5è postulat.

Saccheri, de forma molt rigorosa, va anar deduint teoremes i teoremes partint de la negació del 5è axioma, però no va arribar a cap contradicció. No es va adonar que havia muntat una nova geometria. En la proposició XXXIII del seu llibre, cansat ja de la seva recerca aparentment inútil, acaba rebutjant les altres geometries sense més ni més:

> *"La hipòtesi de l'angle agut (proposició equivalent al 5è postulat i també que la suma dels angles d'un triangle sigui inferior a dos rectes) és absolutament falsa, perquè repugna la" naturalesa de la línia recta.*

Sembla ser que el primer matemàtic que va captar la possibilitat de bastir altres geometries va ser Karl Friedrich Gauss, de Gottingen. El 1824 escriu a F. Taurinus (un amic, matemàtic com ell):

> *"La hipòtesi que la suma dels angles d'un triangle sigui inferior a dos rectes condueix a una geometria molt curiosa, força diferent de la nostra (l'euclidiana), però completament consistent, que he desenvolupat a la meva completa satisfacció."*

Malgrat tot, Gauss no va fer mai públics els seus descobriments i, fins i tot, va demanar a Taurinus que considerés privada l'anterior comunicació i que no li donés publicitat.

El va frenar probablement l'autoritarisme de l'època i especialment l'autoritat i el gran prestigi del filòsof E. Kant (1724-1804), que sostenia que la geometria euclidiana era inherent a la naturalesa del món físic. Deia Kant:

Déu fa geometria d'acord amb els Elements d'Euclides.

Els primers matemàtics que van publicar treballs relatius a la nova geometria de l'angle agut o geometria hiperbòlica van ser dos joves de trenta anys: el rus Nicolai Ivanovitch Lobatchevski (1793-1856) i l'hongarès Janòs Bolyai (1802-1860). És possible que haguessin conegut les idees de Gauss. Sigui com sigui, cal considerar-los tots tres com els pares de la nova geometria, en la qual, per un punt exterior a una recta, es pot traçar més d'una paral·lela i la suma dels angles d'un triangle és inferior a dos rectes.

Faltava encara un pas més per atorgar a la nova geometria la mateixa força que tenia la geometria euclidiana: un model físic o real en el qual es veiés exemplificada. A la segona meitat del segle XIX, van aparèixer aquests models: el primer el va donar l'italià Eugenio Beltrami; després en van donar d'altres Arthur Cayley, Felix Klein i David Hilbert.

La nova geometria de Gauss, Bolyai i Lobatchevski havia sorgit de suposar que la suma dels angles aguts d'un triangle podia ser inferior a dos rectes. L'altra possibilitat alternativa, és a dir, que la suma dels angles d'un triangle fos superior a dos rectes, entrava en contradicció amb la infinitud de la recta i va ser rebutjada. El genial Friedrich Bernhard Riemann (1826-1886) va explorar aquest camí abandonat i va donar un nou pas demostrant que es poden fer geometries en les quals les rectes, tot i ser il·limitades, no siguin infinites, com ara els cercles màxims en una superfície esfèrica. Aquestes seran les anomenades geometries riemannianes.

A principi del segle XX, Albert Einstein va aprofitar les idees de Riemann i va provar que les geometries més idònies per descriure l'univers són les riemaniannes i no pas les euclidianes. Així es trencaria la idea que havien sostingut Galileu, Newton i Kant que la geometria d'Euclides era la millor o, fins i tot, l'única que permetia descriure el cosmos.

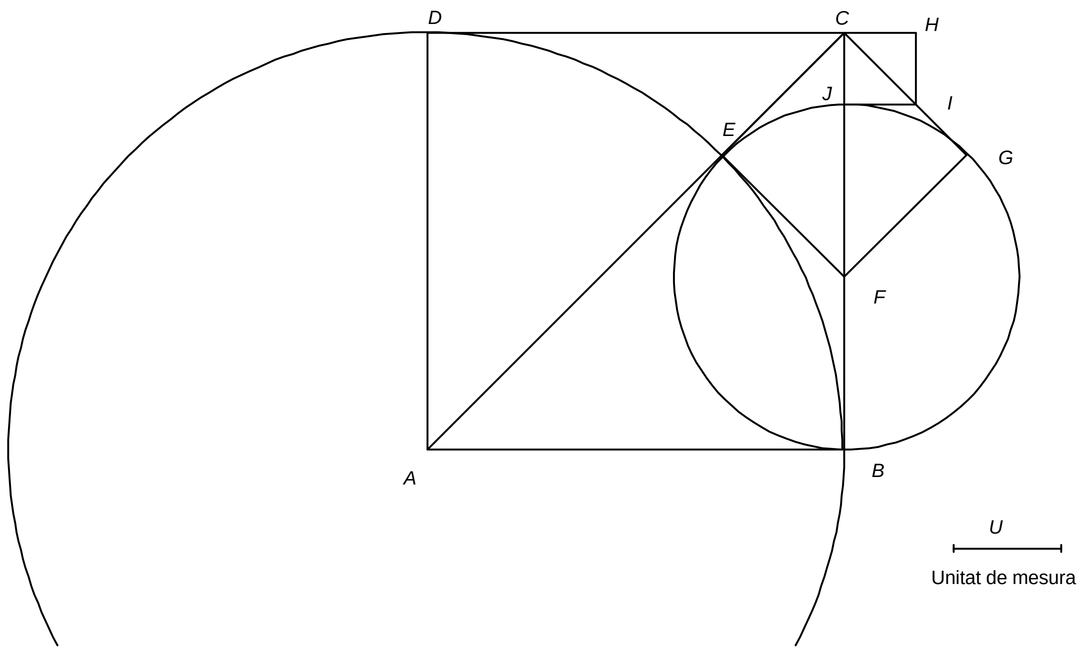
L'aparició de les noves geometries va significar una revolució en el món de les matemàtiques i de les ciències. Segons el gran matemàtic alemany D. Hilbert (1862-1943) va ser:

"*El més notable i suggestiu resultat obtingut en el segle XIX*."

Exemple 3: El problema dels incommensurables

El descobriment dels anomenats segments incommensurables va provocar una greu crisi de confiança en la mesura i en els nombres (això va ser especialment greu per als pitagòrics, que volien reduir-ho tot a nombres), que no es va resoldre fins 2000 anys més tard.

A continuació es dóna un exemple d'incommensurabilitat fet amb Cabri-Géomètre:

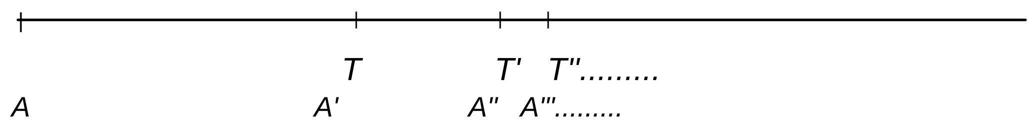


Si els segments *AB* i *AC* admetessin una unitat comuna de mesura *U*, la construcció prova que *U* hauria de ser infinitament petita, és a dir, nul·la, i això no és possible.

Efectivament, si *U* cap un nombre exacte de vegades en el segments *AB* i *AC*, també hauria de cabre un nombre exacte de vegades en el segment *EC* (ja que *AB* = *AE* i *CE* és la diferència entre *AC* i *AE*). Però *EC* = *FB* (ja que els triangles rectangles *ABF* i *AEF* són iguals) i, per tant, *U* també hauria de mesurar de forma exacta el segment diferència *CF* (es té *CF* = *CB*-*FB*). S'obté d'aquesta manera un nou quadrat més petit que l'inicial, *CEFG*, en el qual el costat i la diagonal han de ser mesurables de forma exacta per *U*. Si es reitera el procés, *U* també hauria de cabre de forma exacta en els costats i la diagonal del tercer quadrat *CHIJ*, i així successivament, fins que, òbviament, s'arribarà a un quadrat de costats i diagonal menors que *U* (sigui quina sigui la unitat *U* triada). Això fa evident que l'existència de la unitat *U* és impossible.

Al voltant de tot això, Zenó d'Elea (490- 430 a.C.) va plantejar una sèrie de paradoxes (es coneixen perquè Aristòtil les va recollir) que els matemàtics i pensadors de l'època no van poder resoldre. Potser la més famosa és la d'Aquil·les i la tortuga:

> "Aquil·les i la tortuga fan una cursa. Aquil·les, un dels herois de la guerra de Troia, especialment reputat per la seva rapidesa, dóna un avantatge d'un estadi (mesura de longitud a la Grècia antiga) a la tortuga, confiat com està de poder agafar-la. Zenó afirma que no l'agafarà mai; heus aquí el seu raonament: quan Aquil·les hagi recorregut un estadi i arribi a la posició *T* (la inicial de la tortuga), la tortuga haurà fet camí fins a la posició *T'* i, per tant, no l'haurà agafat; quan Aquil·les arribi a la posició *T'* la tortuga haurà fet novament camí fins a la posició *T''* i, per tant, encara no l'haurà agafada; i així successivament, de tal manera que mai no podrà agafar-la."



No es van trobar solucions per a aquestes paradoxes i això va provocar una greu crisi de confiança en el càlcul amb nombres que representessin longituds, àrees i volums.

El primer matemàtic que va contribuir a superar la situació va ser el grec Èudox de Cnidos (408-355 a.C.). Èudox va proposar un mètode de treball amb proporcions que evitava hàbilment el problema dels incommensurables i de les coses infinitament petites. Aquesta és, per exemple, una de les seves conclusions:

> "*Les àrees de dos cercles són proporcionals als quadrats dels seus radis; els volums de dues esferes són proporcionals als cubs dels seus radis; el volum d'una piràmide és un terç del volum d'un prisma d'igual base i altura i el d'un con és un terç del volum del cilindre d'igual base i altura.*"

També cal atribuir a Èudox l'anomenat mètode d'exhaustió (que ve a ser una mena de pas al límit).

El segon gran pensador grec que contribueix de manera decisiva a la superació del problema dels incommensurables és el polifacètic i genial Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.).

Arquimedes va aprofitar les idees d'Èudox amb gran habilitat i va obtenir molt bons resultats. El que més li agradava recordar a ell mateix va ser el relatiu al càlcul del volum i l'àrea de l'esfera (Arquimedes va provar que si inscrivim una esfera de radi R en un cilindre de radi R i altura $2R$ es té: volum cilindre = 1,5 volum esfera i àrea cilindre = 1,5 àrea esfera). Tan orgullós estava del seu descobriment que va demanar que a la seva tomba s'hi posés una esfera inscrita en un cilindre.

Arquimedes va morir l'any 212 a.C. a mans d'un soldat romà, quan les tropes del general Marcel van ocupar Siracusa en el decurs de la segon guerra púnica.
Més de cent anys després, l'orador i polític romà Ciceró (106-48 a.C.), quan exercia el càrrec de qüestor a Sicília, va descobrir la tomba del seu admirat Arquimedes gràcies a la famosa escultura. Diu Ciceró:

> "*Als afores de Siracusa, al camp, entre els arbustos, s'hi alçava una columneta coronada per una esfera inscrita en un cilindre. La inscripció gairebé hi era esborrada, però jo sabia que aquella escultura s'havia de trobar sobre la tomba d'Arquimedes, el geni més gran de Grècia.*"

Després cal esperar fins al segle XVII per trobar una nova i brillant aportació: la del jesuïta milanès Bonaventura Cavalieri (1598-1647), deixeble de Kepler, que amb el seu *Tractat dels indivisibles* va proporcionar un mètode excel·lent per calcular àrees i volums (de fet, la seva obra més notable es titulava *Geometria indivisibilibus continuorum nova quodam rationes promota* i va ser publicada l'any 1625).

La resolució definitiva del problema dels incommensurables no tindrà lloc, però, fins al final de segle, quan dues figures extraodinàries -l'anglès Isaac Newton (1642-1727) i l'alemany Wilhelm Gottfried Leibniz (1646-1716)- defineixen sòlidament les bases del càlcul diferencial i integral, i el treball amb quantitats infinitament petites.

Exercicis i activitats proposades

1. Organitzeu activitats de treball a l'aula dels conceptes d'àrea i de volum d'acord amb les idees o propostes següents:

a) Càlcul de l'àrea del terme municipal del vostre centre d'estudi.

b) Càlcul del volum d'aigua necessària per tal d'omplir una piscina real.

c) Donades les dimensions del corró d'una piconadora i la velocitat que assoleix, estudieu el temps que trigarà a piconar una carretera determinada.

2. Dissenyeu activitats del tercer nivell de concreció al voltant del tema: "Angles i circumferències amb el programa Cabri-Géomètre: angle inscrit, angle semiinscrit, angle interior i angle exterior en funció dels arcs de circumferència".

3. Considereu la conveniència d'introduir o no la noció de vector a secundària obligatòria. En tot cas, com introduiríeu aquesta noció?

Problemes de geometria

S'afegeixen tres problemes. Com en els capítols anteriors, podreu trobar les solucions a l'annex 3:

Enunciat 11 (el punt de Fermat)

Sobre els costats d'un triangle qualsevol *T* construïm tres triangles equilàters. Si unim els vèrtexs lliures d'aquests triangles amb els vèrtexs oposats del triangle inicial, obtenim tres segments iguals que es tallen en un únic punt. Aquest és el punt de Fermat.

Enunciat 12 (teorema de Napoleó)

Es diu que Napoleó Bonaparte, tot fent dibuixos sobre el terra, va descobrir un teorema. Va dibuixar un triangle i, sobre cada costat, un triangle equilàter. Després va unir el centre dels tres triangles equilàters. Segons ell sempre s'obté un nou triangle equilàter. Investigueu-ho.

Enunciat 13 (un problema de geometria analítica)

Resoleu i comenteu la versió geomètrica del problema següent amb l'ajut del programa Cabri. Per a quins valors de a el sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ (x-a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

té 0, 1, 2, 3, 4, 5 solucions reals diferents?

ANNEX 1. INTRODUCCIÓ AL PROGRAMA CABRI-GÉOMÈTRE

En aquest annex es revisa l'ús del programa Cabri-Géomètre i es proposen alguns exemples pràctics.

A1.1. INTRODUCCIÓ

El programa Cabri-Géomètre és un material que proporciona unes possibilitats excel·lents de treball de la geometria a l'aula. N'hi ha dues versions: una per al DOS, disponible en els centres educatius que depenen del Departament d'Ensenyament des de fa molts cursos, i una altra per a Windows, anomenada Cabri II, que va arribar als centres el juny del 2000.

Aquest programa és el que s'anomena un *entorn geomètric dinàmic* i el principi bàsic del seu disseny és permetre la construcció de figures geomètriques a partir dels anomenats objectes bàsics, com ara punts, rectes, segments, circumferències, etc., i d'un seguit de relacions, com ara punt mitjà, paral·lela, perpendicular, simetria, gir, etc., que l'usuari selecciona des d'un menú. Quan s'ha construït una figura, es poden moure els objectes bàsics i observar a la pantalla les modificacions. Cada element del dibuix es mou de forma contínua i es mantenen les característiques geomètriques de la construcció feta. L'usuari treballa, doncs, amb tota una categoria de dibuixos cadascun dels quals és un cas particular de la construcció que s'ha fet. Això permet observar experimentalment quines propietats són invariants i quines no ho són.

El programa servirà per a tot el que sigui geometria plana, però també per donar representacions planes de l'espai. De fet, fa essencialment tot allò que es pot fer amb regle i compàs. Té, a més, l'atractiu, la nitidesa i les facilitats que proporciona el suport informàtic i, com s'ha dit, l'avantatge de poder sotmetre a moviments els objectes geomètrics del pla.

L'alumnat pot experimentar amb el programa, que compta amb ajudes senzilles, d'una forma autònoma. Això facilita la tasca al professorat.

A primària, és d'esperar que l'alumnat hagi tingut algun contacte amb els mitjans informàtics. Tanmateix, no hauria de ser un gran conflicte que els primers contactes amb els ordinadors fossin a través del Cabri-Géomètre, al contrari, el programa pot servir com a context excel·lent en aquest sentit.

A1.2. IDEES I SUGGERIMENTS

L'ensenyament i l'aprenentatge de la geometria pot adquirir una nova dimensió, no exempta de dificultats, amb l'ús d'aquest tipus de programes. El professor Nicolas Balacheff, especialista en el tema del CNRS francès, precisa:

> *"En primer lloc, els entorns informàtics poden facilitar que l'alumnat desenvolupi noves concepcions en relació amb els objectes matemàtics de formes que encara no estem preparats per afrontar.*

En segon lloc, plantegen al professorat nous problemes en el diagnòstic de la comprensió i la producció dels estudiants [...]"

Des d'aquesta perspectiva, cal actuar amb prudència. És important que el professorat tingui un bon coneixement del programa. A més, sembla recomanable compatibilitzar l'ús del Cabri amb l'ús dels instruments tradicionals (regle, escaires i compàs) per fer geometria.

L'experiència docent permet també fer les precisions següents:

a) És recomanable que l'alumnat aprengui el maneig del programa sobre la marxa, conforme vagin sorgint els problemes o exercicis de construcció.

b) A més, es recomana donar a l'alumnat el màxim d'autonomia possible. L'ús de les ajudes que proporciona el programa, i la seva comprensió, pot ser força instructiu.

c) És evident que tot això només serà possible si es tenen pocs alumnes per ordinador.

d) Es recomana fer un ús esporàdic, però abundós, del programa com a complement a cada activitat o grups d'activitats. Així es trencarà la monotonia i, potser, s'aconseguiran motivacions suplementàries. No sembla gens aconsellable que el programa substitueixi totalment l'ús del regle i el compàs.

A1.3. EXEMPLES

A continuació s'exposen alguns exemples de construccions amb el programa. Es dóna la llista d'instruccions a seguir i el dibuix acabat. Es tracta de propostes molt diverses que es poden fer servir a l'ESO o al batxillerat. Alguns dels exemples es poden emprar, fins i tot, per al treball amb alumnes amb dificultats d'aprenentatge. Es tracta també d'exemples que el lector pot fer servir per familiaritzar-se amb el programa o per aprofundir-hi.

Els exemples d'utilització del programa que s'han proposat als capítols anteriors estaven contextualitzats i inscrits en el desenvolupament d'unitats didàctiques. Aquí, en canvi, es tracta d'exemples aïllats que el lector haurà d'imaginar on podrien fer-se servir.

Algunes de les construccions geomètriques clàssiques que es presenten s'aprofiten per fer construccions més espectaculars i amb components lúdics i estètics. Des d'aquesta perspectiva, l'ús de les coloracions i de les animacions que ofereix el programa són essencials. Aquestes figures es poden emprar com a instruments de motivació per a l'alumnat.

En aquest annex no es presenten exemples per al treball de la geometria analítica que ja s'han vist al capítol 6.

Cal dir finalment que l'annex 3, referent a les pavimentacions poligonals del pla, constitueix també un exemple excel·lent d'utilització del programa.

Exemple 1. *Circumcentre i incentre d'un triangle*. *Creació d'una macroconstrucció*.

1. Construcció d'un triangle.

2. Anomenar els vèrtexs.

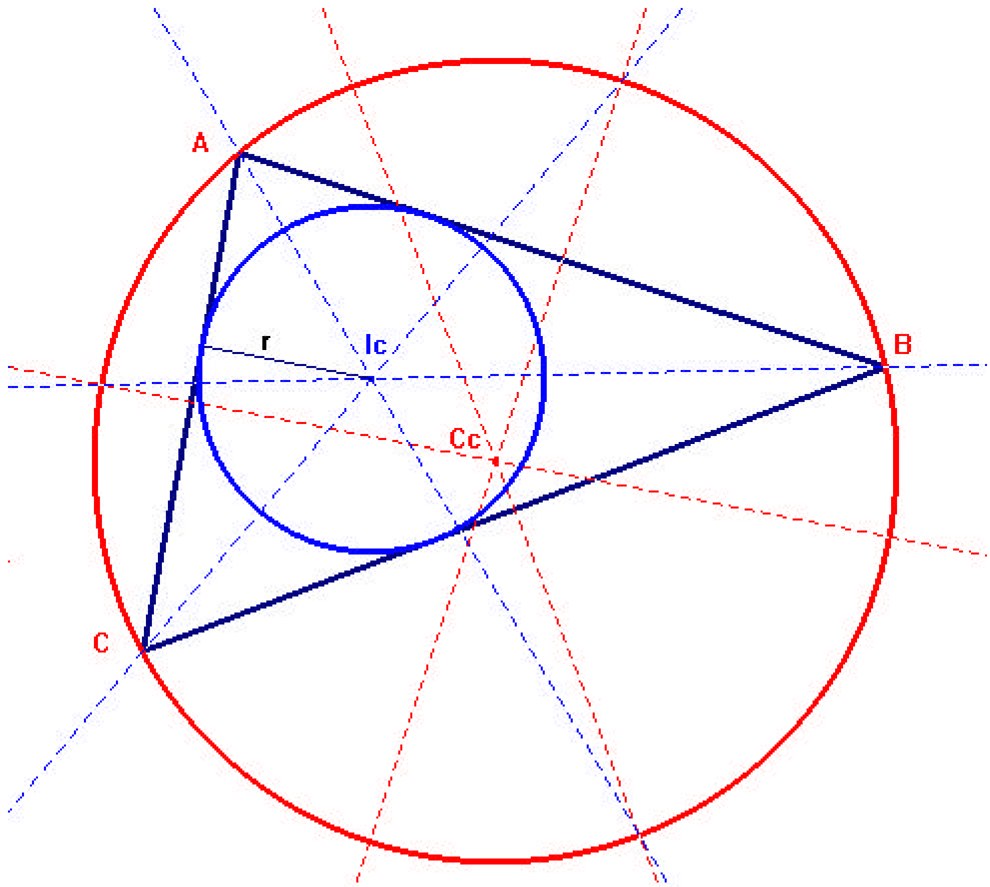
3. Traçar les mediatrius dels costats, comprovar que es tallen en un punt i obtenir el circumcentre *Cc*.

4. Traçar les bisectrius dels costats i obtenir l'incentre *Ic*.

5. Traçar les circumferències circumscrita i inscrita. Per dibuixar la inscrita, cal trobar-ne prèviament el radi *r* en traçar una perpendicular a un dels costats del triangle per l'incentre.

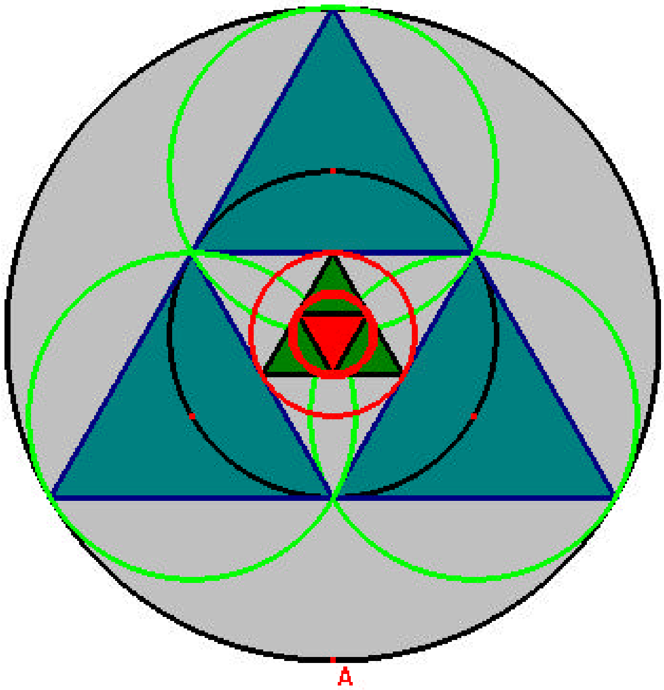
6. La comprovació que la construcció és correcta es pot fer movent els vèrtexs: les circumferències han de romandre sempre circumscrites i inscrites.

7. Es clou l'activitat amb el disseny de dues macroconstruccions: la primera construeix la circumferència circumscrita i el circumcentre d'un triangle; la segona construeix la circumferències inscrita i l'incentre. En els dos casos cal triar el triangle com a únic objecte inicial. Els objectes finals són, respectivament, la circumferència circumscrita i el circumcentre i la circumferència inscrita i l'incentre. Aquestes macros permetran fer automàticament tots els passos per a qualsevol altre triangle.

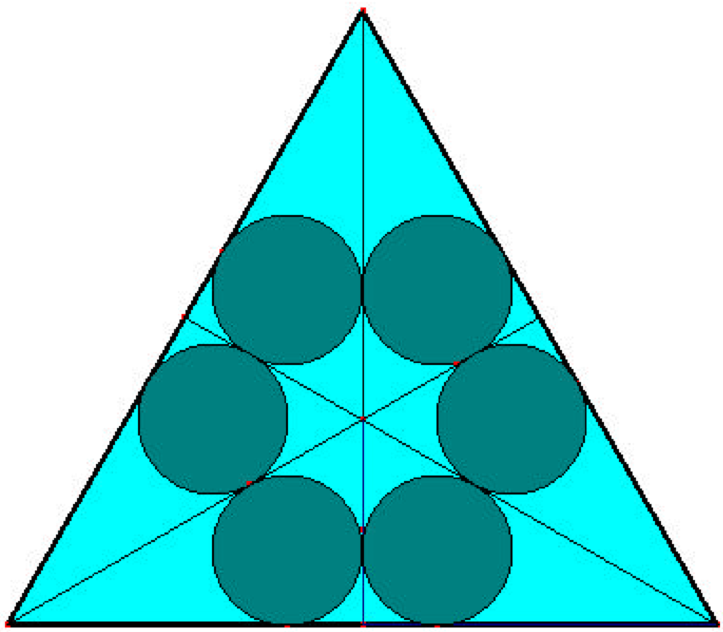


A continuació, es presenten dues construccions que aprofiten les macros dissenyades.

1. Traceu una circumferència i agafeu-hi un punt a sobre. Trobeu-ne el simètric respecte del centre i traceu un diàmetre. Traceu la mediatriu d'un dels radis d'aquest diàmetre i traceu el triangle equilàter inscrit a la circumferència. Trobeu els punts mitjans dels costats i traceu els triangles equilàters inscrits. Apliqueu la macro de l’exemple anterior per dibuixar les circumferències circumscrites. Es pot animar la figura posant “molles” al punt *A* i a la circumferència inicial.



2. Traceu un triangle equilàter i les tres mediatrius. Traceu els sis triangles i apliqueu-los la macro.



Exemple 2. *Construcció de l'arc capaç*

Donats un segment i un angle, des de quins punts del pla es veu el segment sota l'angle donat? Aquest lloc geomètric és de fàcil construcció tal i com s'indica a continuació:

1. Construcció d'un segment d'extrems *A* i *B*.

2. Construcció d'un segment que defineixi l'angle α sobre l'extrem *A*.

3. Mediatriu del segment *AB*.

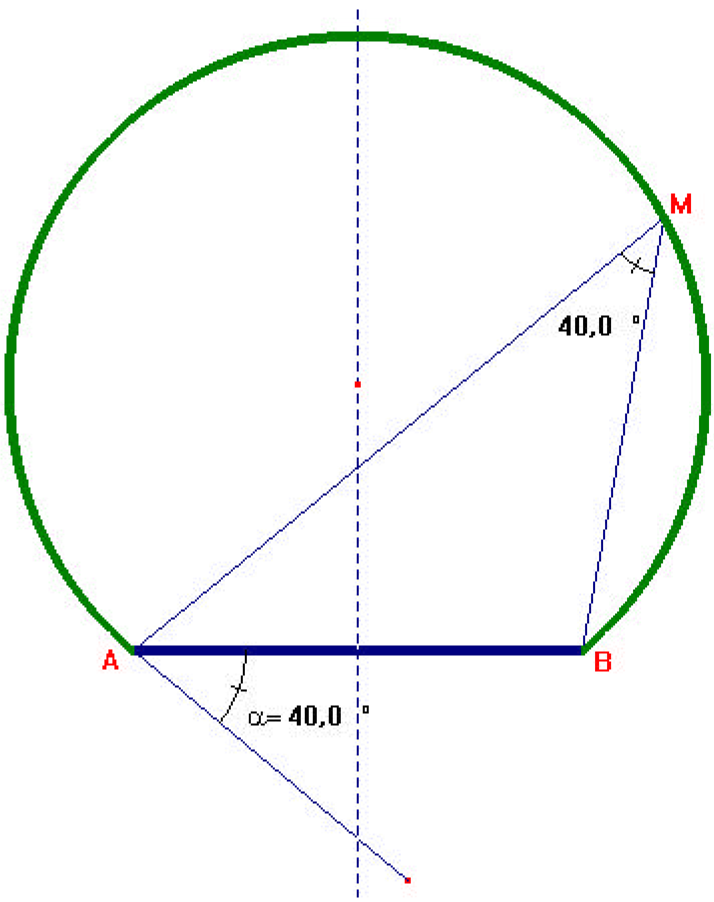
4. Recta perpendicular al segon segment (el que defineix l'angle) per *A*.

5. Circumferència que conté l'arc capaç.

6. Amb la instrucció *arc* del menú es traça l'arc capaç (cal determinar-ne tres punts: per exemple *A*, *B* i un punt qualsevol sobre la circumferència). A continuació s'oculta la circumferència i només es veurà l'arc.

6. Es pren un punt *M* sobre l'arc capaç. Es mesuren els angles i es comprova la igualtat.

7. S'afegeix moviment a la figura: es pot emprar la instrucció animació per moure *M* sobre l'arc i es pot canviar l'angle α per observar el canvi de l'arc capaç.



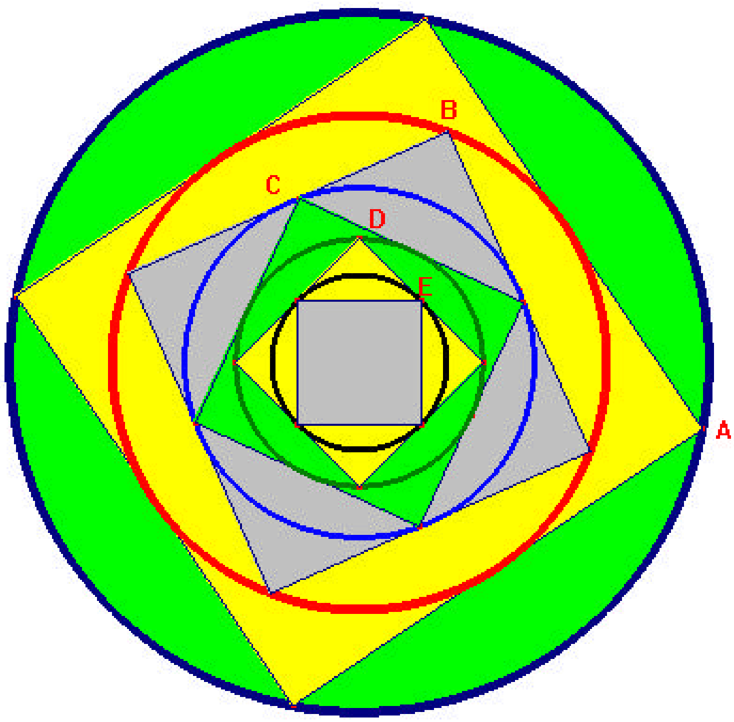
Exemple 3. *Construcció del quadrat inscrit en una circumferència i de l'octàgon regular inscrit. Construcció amb tres estrelles de vuit puntes i animació múltiple*

La construcció d'aquestes figures, basades en la inscripció d'un quadrat en una circumferència, és un exemple d'activitat que pot oferir motivacions suplementàries per a l'alumnat i que es pot fer perfectament a primer cicle d'ESO.

En primer lloc es tracta de construir el quadrat inscrit en una circumferència i dissenyar una macro. Les instruccions, que són molt senzilles, són les següents:

1. Es traça una circumferència i s'hi pren un punt *A* amb la instrucció *punt sobre un objecte*.
2. Es troba el simètric de *A* respecte del centre amb la instrucció *simetria*.
3. Es traça el diàmetre que determinen els dos punts i la mediatriu del diàmetre.
4. Es traça el quadrat amb la instrucció *polígon*.
5. Es dissenya una macro que, donada una circumferència i un punt sobre ella, traci el quadrat inscrit. Els objectes inicials són, doncs, la circumferència i el punt que s'hi ha pres a sobre, i l'objecte final és el quadrat. És essencial comptar amb el punt com a objecte inicial, si es volen fer animacions.

La macro dissenyada es pot aprofitar per fer una construcció com ara la següent:



Amb la instrucció *animació múltiple* del penúltim botó es posen molles, als punts *A*, *B*, *C*, *D* i *E*, que cal estirar en sentits oposats,. A continuació es prem retorn i es posa en marxa l'animació. Cadascun dels quadrats inscrits gira independentment dels altres.

Els mateixos passos serveixen de base per a la construcció de l'octàgon regular inscrit i de l'estrella octagonal. En aquest cas també es proposa el disseny d'una macro que inscriu l'estrella de vuit puntes:

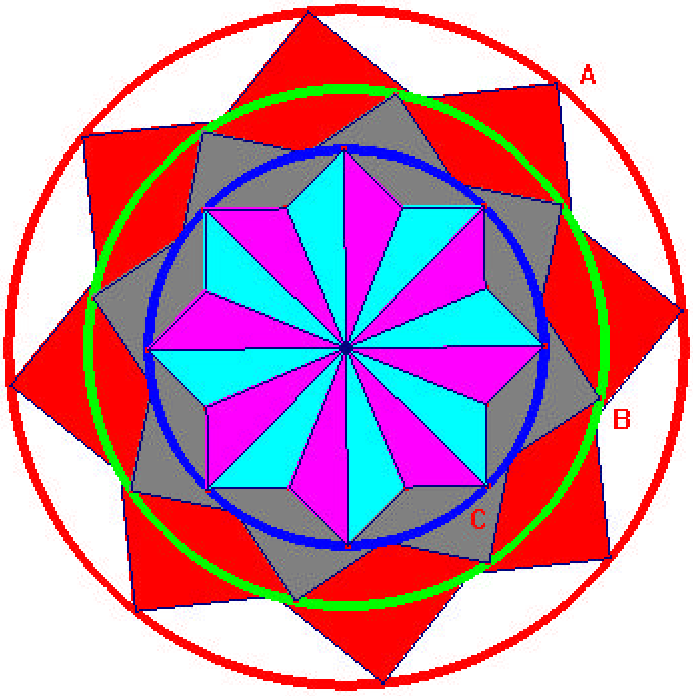
1. Després de traçar el quadrat inscrit en una circumferència amb la macro anterior, es tracen les mediatrius dels costats del quadrat i s'obté l'octàgon regular inscrit amb la instrucció *polígon*.

2. Es tracen les diagonals de l'octàgon amb la instrucció *segment* i l'estrella octangular inscrita novament amb la instrucció *polígon*.

3. Es dissenya una macro que, donada una circumferència i un punt sobre ella, traci l'octàgon inscrit. Els objectes inicials són, doncs, la circumferència i el punt que s'hi ha pres a sobre, i l'objecte final és l'estrella octagonal. Com a l'exemple anterior, és essencial comptar amb el punt com a objecte inicial, si es volen fer animacions.

4. Finalment, només cal traçar, successivament, les dues circumferències concèntriques amb les seves estrelles inscrites (per a això es fa servir la macro).

5. Per afegir coloració amb la instrucció *omplir* del menú cal redefinir els polígons o els triangles corresponents amb la instrucció *polígon* o amb la instrucció *triangle*.



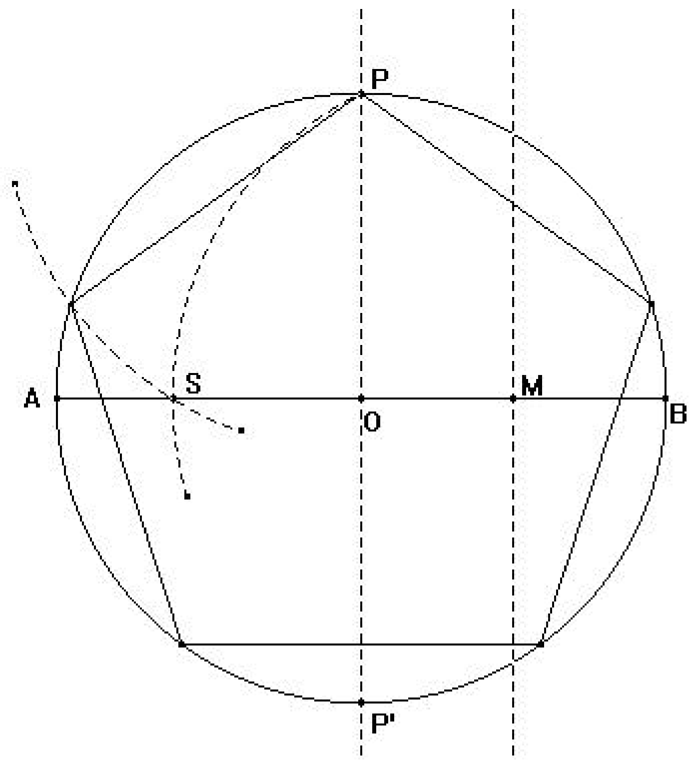
Amb la instrucció *animació múltiple* del penúltim botó es posen molles, als punts *A*, *B*, i *C*, que cal estirar en sentits oposats. A continuació es prem retorn i es posa en marxa l'animació. Cadascuna de les estrelles inscrites gira independentment de les altres.

Exemple 4. *Construcció del pentàgon regular inscrit i d'una rosassa a partir de l'estrella de cinc puntes*

La construcció del pentàgon regular inscrit es pot fer a partir de les instruccions següents (de fet, aquesta és la construcció de Claudi Ptolemeu):

1. Es crea una circumferència i el seu centre *O*.
2. Es traça un diàmetre d'extrems *A* i *B*.
3. Es traça la mediatriu del diàmetre *AB*. Tallarà la circumferència en els punts *P* i *P'*.
4. Es determina el punt mitjà del radi *AO* i se l'anomena amb la lletra *M*.
5. Es traça la circumferència de centre *M* i radi *MP*.
6. Sobre el diàmetre *AB* la circumferència anterior determina un punt *S*.
7. Aleshores el costat del pentàgon inscrit és precisament el segment *PS* (i el costat del decàgon inscrit és el segment *OS*).
8. Ja es pot completar el pentàgon inscrit (i el decàgon també).

Les prestacions específiques de Cabri II permeten emprar línies de punts (opció *puntejat* del menú) i arcs (amb l'opció *arc* del menú cal determinar tres punts a partir de les circumferències i ocultar-les després). D'aquesta manera, el dibuix obtingut té les mateixes característiques que un dibuix fet amb regle i compàs.



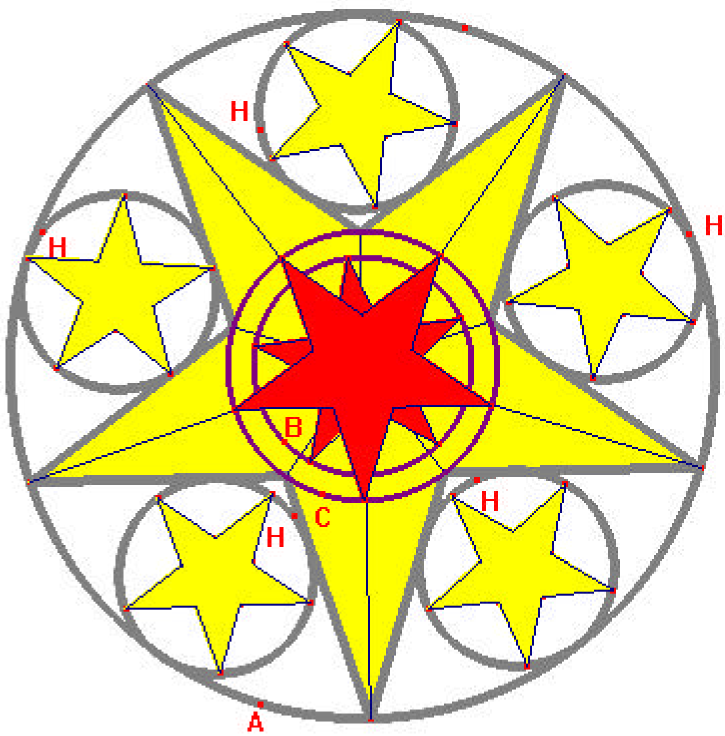
Aquesta construcció s'aprofita, a continuació, per fer una rosassa basada en l'estrella de cinc puntes. Certament és més complexa que la construcció del tercer exemple i presenta més dificultats per a l'alumnat.

Es poden seguir els passos següents:

1. A partir del pentàgon regular inscrit es pot traçar l'estrella de cinc puntes inscrita. En aquest cas també convé, com a l'exemple anterior, partir d'un punt sobre la circumferència per facilitar les animacions, cosa que s'aconsegueix, com sempre, amb la instrucció *punt sobre un objecte* del menú.

2. Amb la instrucció *polígon* del menú, els alumnes han de redefinir l'estrella de cinc puntes i crear una macroconstrucció que, donada una circumferència i un punt sobre ella, construeixi l'estrella de cinc puntes inscrita. La macro facilitarà la feina posterior.

3. No han de tenir problemes per traçar les circumferències concèntriques amb les seves estrelles corresponents. En canvi, les cinc circumferències tangents interiors (a la circumferència gran inicial i a l'estrella inscrita gran) presenten més dificultats. El seu centre es pot trobar per intersecció del radi que va del centre de la circumferència inicial a un dels vèrtexs còncaus de l'estrella, conclusió relativament fàcil de trobar, i la bisectriu interior del parell de rectes format per un dels costats de l'estrella i la recta tangent a la circumferència inicial en el punt d'intersecció del radi esmentat abans, cosa força més complicada i per a la qual probablement caldran moltes ajudes del professorat.



Amb la instrucció *animació múltiple* es posen molles als punts *A*, *B* i *C* i se n'observen els moviments. També es pot animar la circumferència exterior i les cinc estrelles inscrites mitjançant els punts *H*.

Exemple 5. *La construcció de Gauss de l'heptadecàgon regular inscrit*

La construcció que es presenta a continuació és la que va descobrir Gauss als 17 anys i la que el va convèncer de la seva vocació matemàtica. Es tracta d'una construcció força complexa que demana paciència i precisió. Només alguns alumnes poden seguir-la sense perdre's.

1. Es construeix el diàmetre *A H1* i el seu punt mitjà *O*.

2. Es construeix la circumferència de centre *O* per *A* i *H1*.

3. Es construeix la mediatriu del diàmetre *AH1* i es talla amb la circumferència. S'obtenen els punts *S* i *S'*.

4. Es construeix el punt mitjà del segment *OS* i se l'anomena *N*.

5. Es construeix el punt mitjà del segment *ON* i se l'anomena *B*.

6. Es construeix la bisectriu de l'angle *OBH1* i es talla amb el diàmetre per obtenir el punt *F*.

7. Es construeix la bisectriu de l'angle *OBF* i es talla amb el diàmetre per obtenir el punt *E*.

8. Es construeix la perpendicular a *EB* per *B* i es talla amb el diàmetre per obtenir el punt *P*.

9. Es construeix la bisectriu de l'angle *PBE* i es talla amb el diàmetre per obtenir el punt *D*.

10. Es construeix el punt mitjà del segment *DH1* i se l'anomena *G*.

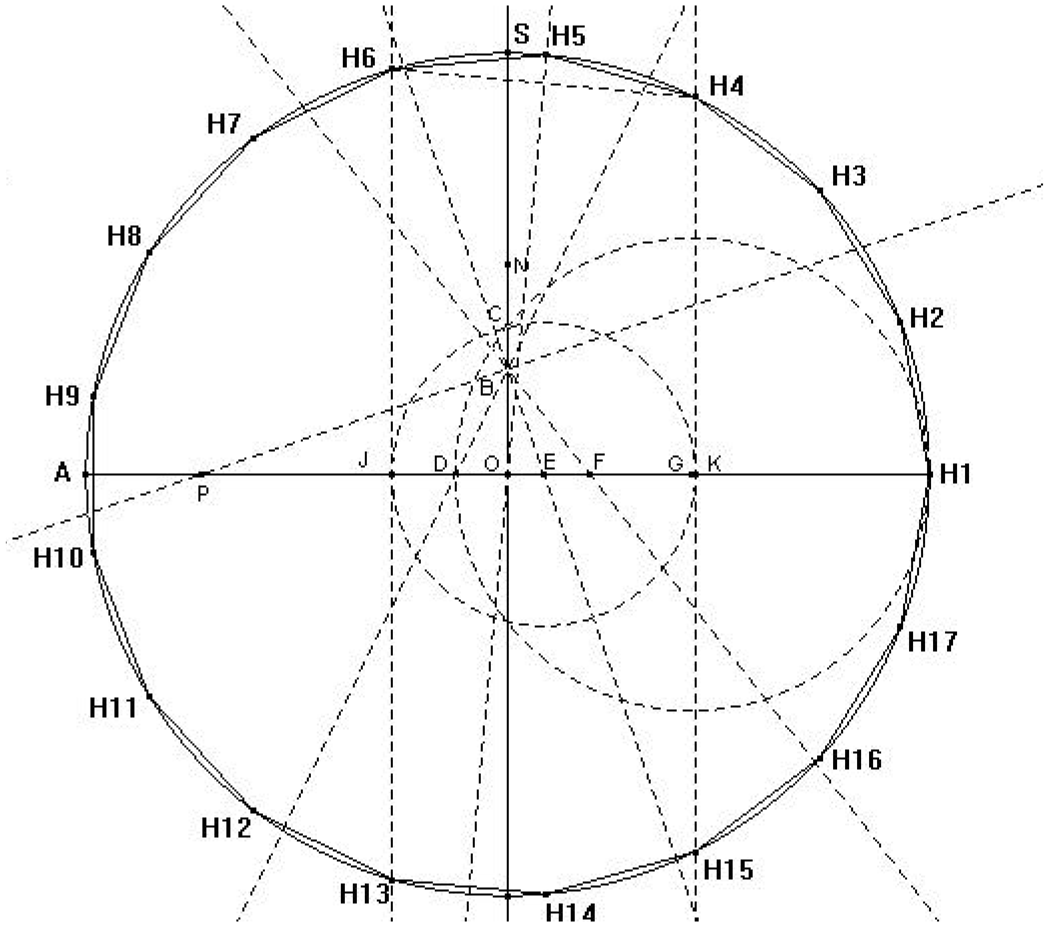
11. Es construeix la circumferència de centre *G* que passa per *D* i *H1* i es talla amb la recta mediatriu del diàmetre (recta *OS*) per tal d'obtenir els punts *C* i *C'*.

12. Es construeix la circumferència de centre *E* que passa per *C* i es talla amb el diàmetre (recta *AH1*) per tal d'obtenir els punts *J* i *K* (molt de compte, *K* és diferent de *G*!). Es tracen les rectes perpendiculars al diàmetre *AH1* pels punts *J* i *K*, i es tallen amb la circumferència circumscrita (la de centre *O* que passa per *A*) per tal d'obtenir els vèrtexs de l'heptadecàgon regular (es consideren ordenats en sentit antihorari des del vèrtex *H1* fins a *H17*) *H4*, *H6*, *H13* i *H15*.

13. Es traça la mediatriu del segment *H4H6* i es talla amb la circumferència circumscrita per tal d'obtenir el vèrtex *H5* i el costat de l'heptadecàgon *H4H5*.

14. Es construeixen la resta de vèrtexs de l'heptadecàgon regular inscrit i es traça el polígon.

(Vegeu el dibuix a la pàgina següent)



Exemple 6. *L'el·lipse com a traça d'un punt i com a lloc geomètric*

En primer lloc, es tracta de construir un punt genèric d'una el·lipse de semieixos a i b i observar-ne la traça.

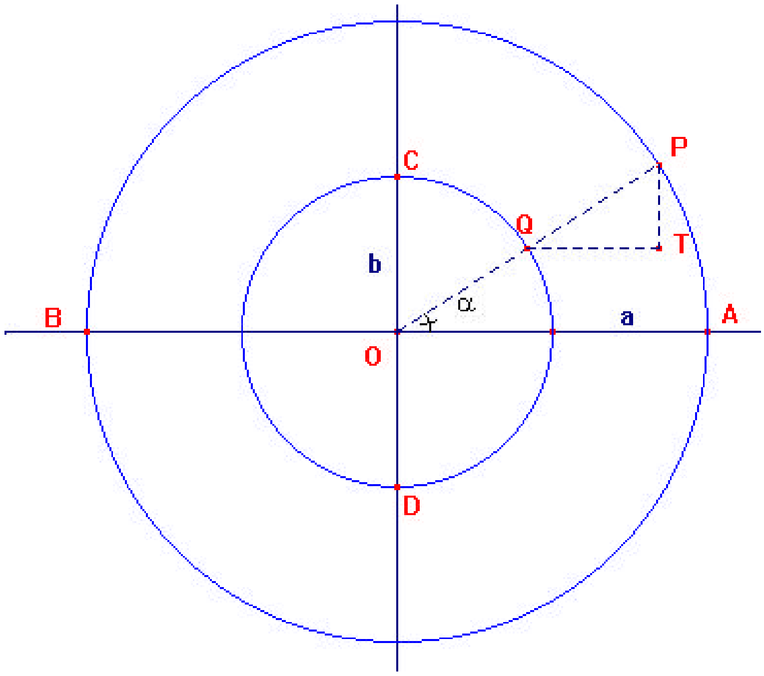
1. Es tracen dues rectes perpendiculars que serviran de suport per als semieixos de l'el·lipse.

2. Es tracen dues circumferències concèntriques de radis a i b.

3. Amb l'opció *punt sobre un objecte*, s'agafa un punt $P=(a \cdot cos\alpha,\ a \cdot sin\alpha)$ sobre la circumferència gran (aquest punt només es podrà moure sobre aquesta circumferència) i es traça el radi vector corresponent que dóna un punt $Q=(b \cdot cos\alpha,\ b \cdot sin\alpha)$ sobre la circumferència petita.

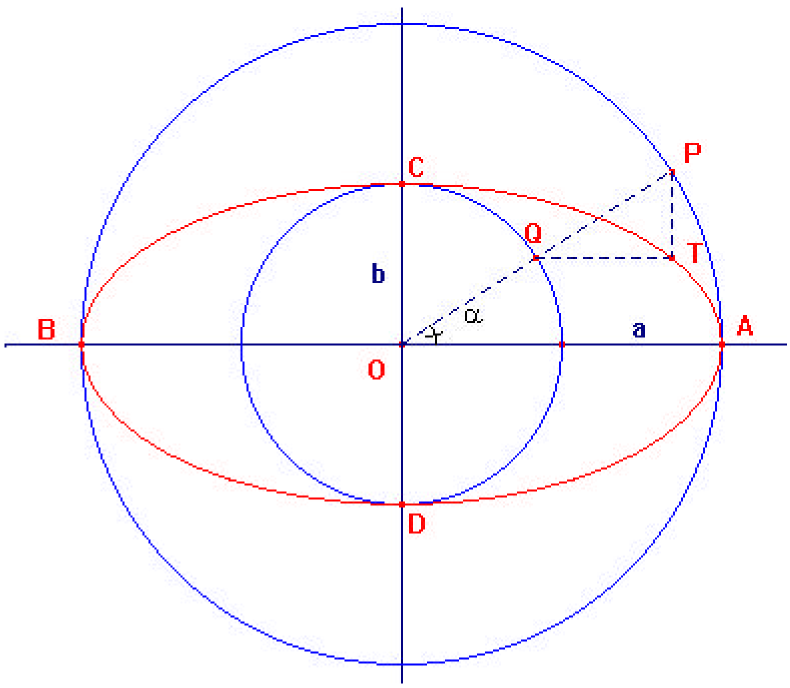
4. La circumferència de radi a dóna l'abscissa i la de radi b l'ordenada de cada punt de l'el·lipse. Un punt genèric de l'el·lipse és $T=(a \cdot cos\alpha,\ b \cdot sin\alpha)$.

5. El punt genèric T quan es mou el punt P sobre la circumferència descriu l'el·lipse. Per fer-la visible, cal activar la traça del punt T amb la instrucció *traça activada/ traça desactivada* del penúltim botó del menú i moure el punt P sobre la circumferència gran. Si es vol fer desaparèixer la traça cal desactivar-la i aplicar la instrucció *regenerar dibuix*.



La segona part d'aquesta construcció consisteix a fer visible de manera permanent l'el·lipse.

Només cal prémer la instrucció *lloc geomètric* del menú i a continuació clicar sobre el punt *T* i el punt *P* a continuació. El programa interpreta que ha de calcular i representar el lloc geomètric que descriu *T* quan *P* es desplaça sobre la circumferència que el suporta.

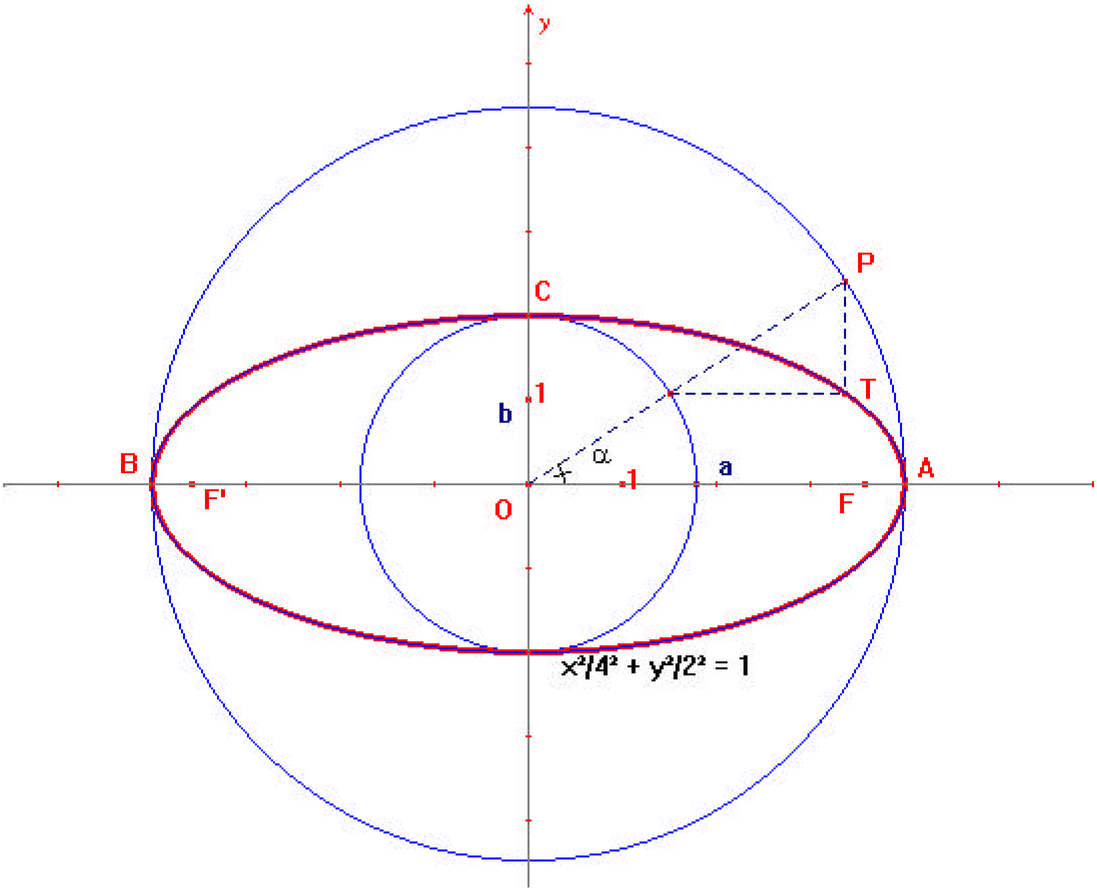


La tercera part de la construcció comprèn els passos següents:

1. En primer lloc es precisen els focus *F* i *F'* fent ús de la instrucció *compàs*: es traça la circumferència de centre *C* i radi *a* (*a* és el semieix major de l'el·lipse i cal redefinir-lo com a segment) que talla l'eix horitzontal en els focus.

2. A continuació amb la instrucció *cònica* es redefineix l'el·lipse marcant-hi cinc punts a sobre. Això permetrà trobar-ne l'equació posteriorment.

3. Amb la instrucció *nous eixos* posem l'eix d'abscisses sobre la recta que suporta l'eix major i l'eix d'ordenades sobre la que suporta l'eix menor. Amb la instrucció *equació i coordenades* fem aparèixer l'equació de l'el·lipse. Podem observar els canvis de l'equació i de l'excentricitat en modificar la longitud dels radis de les dues circumferències.



Exemple 7. *Construcció de la cicloide com a lloc geomètric*

La cicloide és la corba plana que genera un punt marcat sobre una circumferència d'un cercle quan roda, sense lliscar, sobre una recta. Les seves equacions paramètriques són les següents:

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases} \quad \text{on } R \text{ és el radi del cercle.}$$

Aquestes són les instruccions per a la seva construcció:

1. Es construeixen dues semirectes. La primera suportarà el punt *A* i serà per on rodarà la circumferència. La segona servirà de suport al radi *R* (construïm el segment *R* sobre la semirecta i ocultem la semirecta).

2. Prenem el punt *A* sobre la primera semirecta i tracem dues circumferències: una de centre *M* i radi *R* i l'altra de centre *A* i radi *R*, amb la instrucció *compàs* del menú.

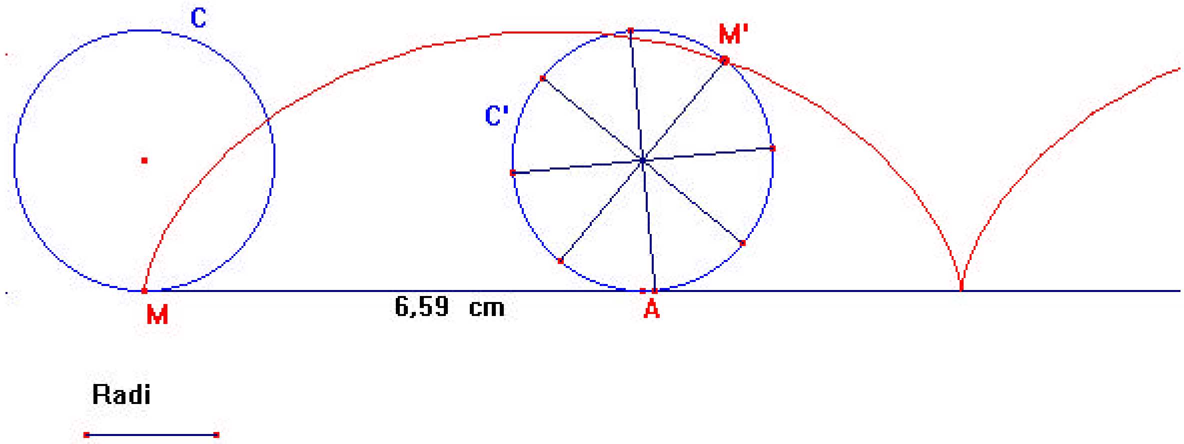
3. Tracem dues perpendiculars a la primera semirecta per *M* i *A* i tracem les circumferències *C* i *C*'.

4. Mesurem la distància *MA* i la transferim (instrucció *transferència de mesures*) sobre *C*' a partir del punt *A*. El simètric del punt obtingut respecte de la perpendicular de l'apartat *3* per *A* és el punt *M*' (posició que ocuparia *M* en rodolar *C* sobre la primera semirecta la distància transferida).

5. El lloc geomètric (instrucció *lloc geomètric* del menú) del punt *M*' en desplaçar-se *A* sobre la semirecta és la cicloide.

6. Finalment tracem els radis de la circumferència *C*' per donar efecte de moviment.

7. Si es mou el punt *A* al llarg de la semirecta donada, es veu com el punt *M*' descriu la cicloide. Es pot modificar el radi donat a part.



✍

Exercicis i activitats proposades

1. Traceu, fent ús del programa Cabri-Géomètre:

i) La recta tangent a una circumferència per un punt de la circumferència.

ii) Les rectes tangents a una circumferència per un punt exterior.

iii) Les rectes tangents comunes a dues circumferències.

Segueix a l'altra pàgina ...

✍

Exercicis i activitats proposades

2. Construïu un triangle *ABC* i considereu un punt qualsevol del pla *P*. Siguin P_1 el simètric de *P* respecte del punt *A*, P_2 el simètric de P_1 respecte del punt *B* i P_3 el simètric de P_2 respecte del punt *C*. Moveu el punt *P*. Què es pot dir de la figura quan P_3 i *P* coincideixen? Construïu el punt mitjà *I* del segment PP_3. Què es pot dir d'aquest punt quan P_3 es mou? Doneu una explicació raonada (aquest exercici està extret de CAPPONI, B. i LABORDE, C. *Cabri-Classe*. Argenteuil: Editions Archimède, 1995).

3. Construïu una rosassa anàloga a la presentada a l'exemple 3 de l'apartat A.1.5.2 a partir de l'estrella de sis puntes.

4. Construïu el polígon regular inscrit de 15 costats a partir d'aquestes dues indicacions:

a) Trobeu dos nombres enters *A* i *B* tals que: $\frac{A}{3}+\frac{B}{5}=\frac{1}{15}$

b) A partir dels mètodes que permeten inscriure el triangle equilàter i el pentàgon i de l'indicació anterior, deduïu un mètode per inscriure el polígon regular de 15 costats.

ANNEX 2. LES PAVIMENTACIONS DEL PLA

En aquest annex es presenta i s'estudia el problema de les pavimentacions poligonals del pla. També es donen totes les solucions de forma gràfica.

A2.1. INTRODUCCIÓ I PLANTEJAMENT DEL PROBLEMA

Els arquitectes, els decoradors i els artistes s'han plantejat, ja des de l'antiguitat, de quina manera es pot pavimentar el pla amb polígons regulars. Potser perquè la natura n'ofereix exemples força espectaculars en les pells dels rèptils i en els teixits animals i vegetals, o potser guiats només per un afany estètic.

Aquest és el problema plantejat amb més precisió:

> ***"Com es pot pavimentar una superfície plana amb polígons regulars que tinguin entre ells els costats iguals, de forma que a cadascun dels vèrtexs hi concorrin els mateixos polígons i amb el mateix ordre?"***

Tothom té al cap més d'una solució. Les quadrícules, per exemple, en donen una i els ruscs de les abelles una altra. Quines altres solucions hi ha? Quins tipus de polígons hi poden intervenir?

El problema té certa complexitat, però és pot plantejar perfectament a alumnes de secundària i pot constituir, per exemple, un excel·lent tema de treball de recerca.

D'altra banda, el problema admet també un plantejament de caire experimental i manipulatiu en el qual l'alumnat, amb peces de Creator (sempre que això sigui possible) o amb cartolines retallades, pot investigar, des d'un punt de vista intuïtiu, les agrupacions de polígons que pavimenten el pla.

Es tracta, en definitiva, d'un problema especialment interessant a causa de la seva formulació pràctica que es tradueix en un problema geomètric, en primera instància, i algèbric després. És, doncs, un exemple fins a cert punt paradigmàtic dels problemes geomètrics i del treball matemàtic en general i, per això mateix, s'ha considerat interessant presentar-lo, ni que sigui de forma breu.

A2.2. ESBÓS DE LA RESOLUCIÓ

Si en un vèrtex qualsevol d'una pavimentació hi concorren n polígons regulars de x_1, x_2, x_3, ..., x_n costats cadascun, respectivament, es té:

Suma de tots els angles en el vèrtex V = 360º

Com que tots els angles interiors d'un polígon regular de x_i costats valen:

$\dfrac{(x_i - 2)\cdot 180^\circ}{x_i}$ (ja que el polígon es pot descompondre en x_i - 2 triangles).

Es pot concloure, doncs, que:

$$\frac{(x_1-2)\cdot 180^\circ}{x_1} + \frac{(x_2-2)\cdot 180^\circ}{x_2} + \overset{n}{\ldots\ldots} + \frac{(x_n-2)\cdot 180^\circ}{x_n} = 360^\circ$$

Si se simplifica per 180º i es fan les divisions s'obté:

$$(1-\frac{2}{x_1}) + (1-\frac{2}{x_2}) + \overset{n}{\ldots\ldots} + (1-\frac{2}{x_n}) = 2$$

Equivalent a l'equació:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \overset{n}{\ldots\ldots} + \frac{1}{x_n} = \frac{n-2}{2}$$

Es tracta ara de resoldre aquesta equació en nombres enters, tenint en compte, a més, les fites següents per a n:

$$3 \leq n \leq 6$$

Efectivament, a cada vèrtex es necessita un mínim de tres polígons convexos per arribar als 360º i, a més, mai no se n'hi poden posar més de 6, ja que el d'angle interior més petit és el triangle equilàter de 60º.

La resolució de l'equació passa, per tant, per estudiar els casos $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ i $n = 6$.

Tots requereixen de cert treball algèbric que caldrà completar amb la constatació geomètrica de si tot quadra quan es considera el conjunt de tots els vèrtexs (algunes solucions de l'equació, vàlides des del punt de vista algèbric, s'hauran de descartar ja que no compleixen condicions suficients per a pavimentar. Es podria dir que a cada vèrtex els polígons encaixen formant 360º, però que, en canvi, no encaixem uns vèrtexs amb els altres.

Aquest és, per exemple (i parcialment), el cas $n = 3$ que és el que aporta més solucions i potser el més complex:

Es té: $$\frac{1}{2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$$

La igualtat obliga algun dels x_i a ser ≤ 6 (en cas contrari, la suma $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ seria superior a $\frac{1}{2}$). Es pot considerar, per exemple, que es tracta de x_1.

A més, també ha de ser $x_1 \geq 3$ (el primer polígon regular és el triangle equilàter).

Tot això porta als subcasos:

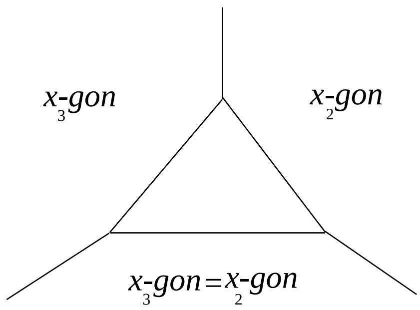
$n = 3$ i $x_1 = 3$
$n = 3$ i $x_1 = 4$
$n = 3$ i $x_1 = 5$
$n = 3$ i $x_1 = 6$

Si es considera, per exemple, el primer dels subcasos:

$n = 3$ i $x_1 = 3$

Es té, doncs: $\frac{1}{6} = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$

D'altra banda, a més, unes senzilles consideracions geomètriques porten a la igualtat: $x_2 = x_3$. Efectivament, si es consideren els tres vèrtexs d'un dels triangles equilàters i es para atenció als polígons que surten al seu voltant:



Es té, per tant, forçosament $x_2 = x_3$, amb la qual cosa, de l'equació inicial es conclou:

Solució 1: $n = 3$ i $x_1 = 3$ i $x_2 = x_3 = 12$

Els altres subcasos ($n = 3$ i $x_1 = 4$; $n = 3$ i $x_1 = 5$ i $n = 3$ i $x_1 = 6$) se solucionen de forma essencialment anàloga.

Pel que fa al casos $n = 4$, $n = 5$ i $n = 6$, també es poden discutir de manera similar o, en alguns casos, fixant-se directament en la disposició del polígons. Per exemple, el cas $n = 6$ és trivial: si a cada vèrtex hi concorren 6 polígons amb angles de com a mínim 60º i han de sumar tots 6 un total de 360º, es conclou, per força, que tots seran triangles equilàters.

En total s'obtenen 10 solucions -una d'elles doble-, amb la qual cosa hi ha 11 pavimentacions amb els requisits de l'enunciat inicial:

Solució 1: $n = 3$; $x_1 = 3$; $x_2 = 12$; $x_3 = 12$

Solució 2: $n = 3$; $x_1 = 4$; $x_2 = 6$; $x_3 = 12$

Solució 3: $n = 3$; $x_1 = 4$; $x_2 = 8$; $x_3 = 8$

Solució 4: $n = 3$; $x_1 = 6$; $x_2 = 6$; $x_3 = 6$

Solució 5: $n = 4$; $x_1 = 3$; $x_2 = 3$; $x_3 = 6$; $x_4 = 6$

Solució 6: $n = 4$; $x_1 = 3$; $x_2 = 4$; $x_3 = 4$; $x_4 = 6$

Solució 7: $n = 4$; $x_1 = 4$; $x_2 = 4$; $x_3 = 4$; $x_4 = 4$

Solució 8: $n = 5$; $x_1 = 3$; $x_2 = 3$; $x_3 = 3$; $x_4 = 3$; $x_5 = 6$

Solucions 9 i 10: $n = 5$; $x_1 = 3$; $x_2 = 3$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$; $x_5 = 4$

Solució 11: $n = 6$; $x_1 = 3$; $x_2 = 3$; $x_3 = 3$; $x_4 = 3$; $x_5 = 3$; $x_6 = 3$

A2.3. ELS DIBUIXOS

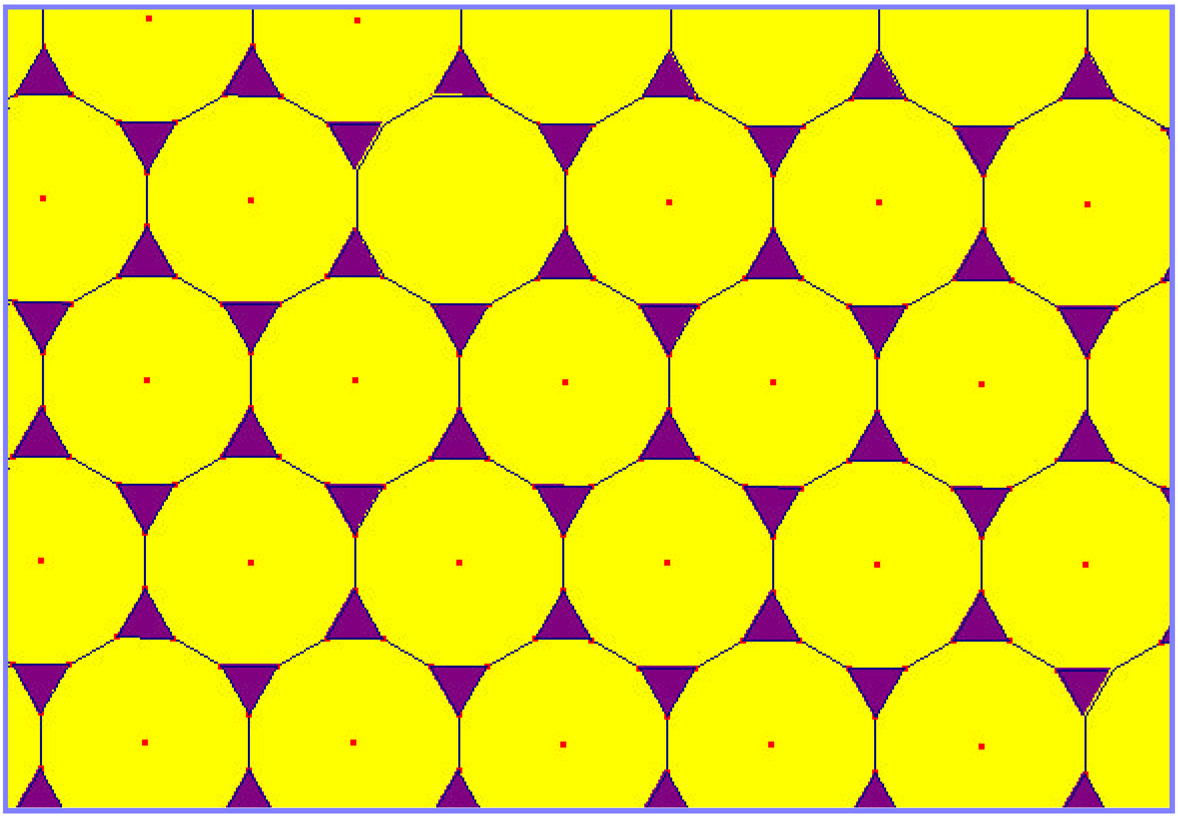
En aquest apartat es presenten les 11 tessel·lacions del pla fetes amb polígons regulars. Apareixen ordenades d'acord amb el llistat anterior.

S'han qualificat de regulars en els casos en què només hi intervé un tipus de polígon i de semiregulars si hi intervenen més de dos tipus de polígons.

Cal destacar també que tant la número 5 com la número 6 admeten reordenacions dels polígons a cada vèrtex, amb la qual cosa apareixen noves pavimentacions, tot i que l'ordre dels polígons en els diferents vèrtexs ja no és el mateix i no es compleixen, doncs, les condicions de l'enunciat.

Les instruccions per fer els dibuixos poden ser diverses. A partir d'alguna construcció bàsica, es poden emprar moviments per obtenir tota la tesel·lació. Hi ha opcions més ràpides, opcions més elegants i opcions que demanen un treball més minuciós. Aquí es presenta per a cadascun dels casos una de les moltes possibilitats de construcció que hi ha.

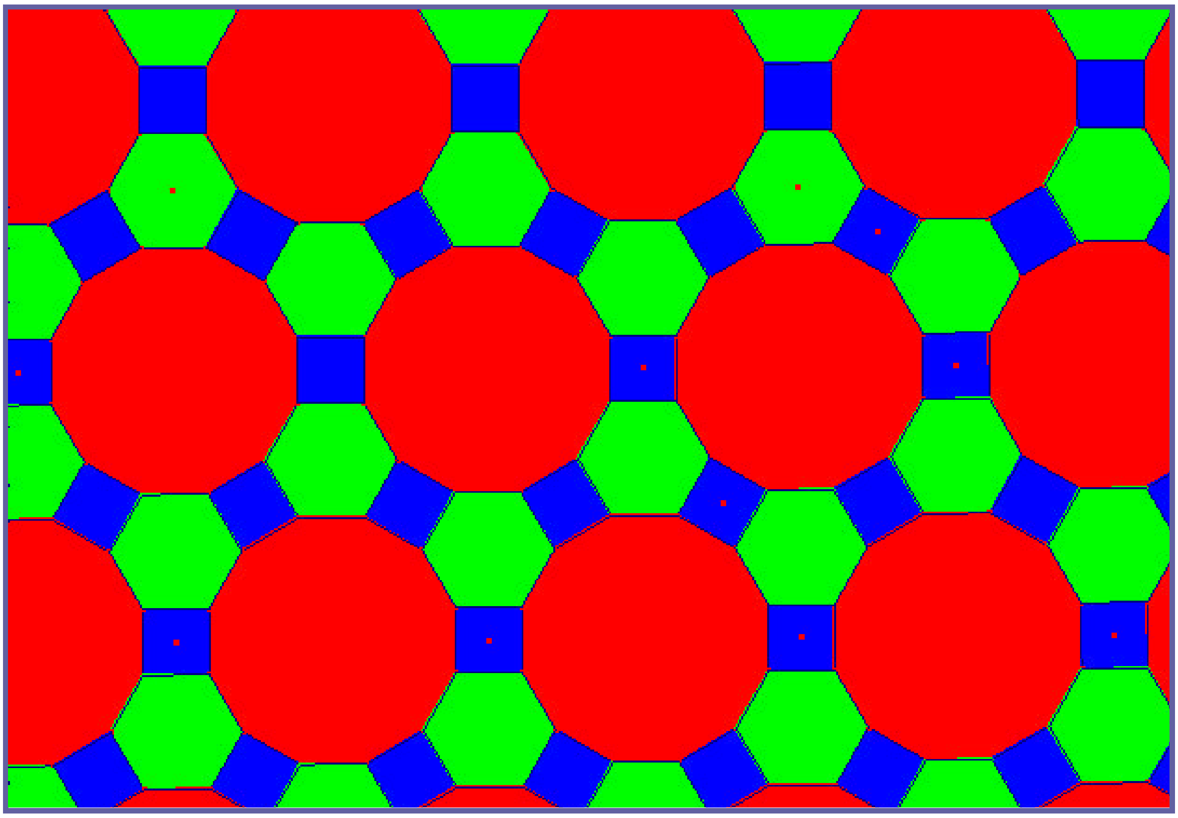
TESSEL·LACIÓ SEMIREGULAR A BASE DE TRIANGLES EQUILÀTERS I DODECÀGONS (n = 3; 3; 12; 12)



INSTRUCCIONS PER AL DIBUIX

1. Construïu un hexàgon regular inscrit en una circumferència.
2. Traceu les mediatrius dels costats i construïu el dodecàgon inscrit.
3. Amb la instrucció *simetria axial* feu la pavimentació del pla.

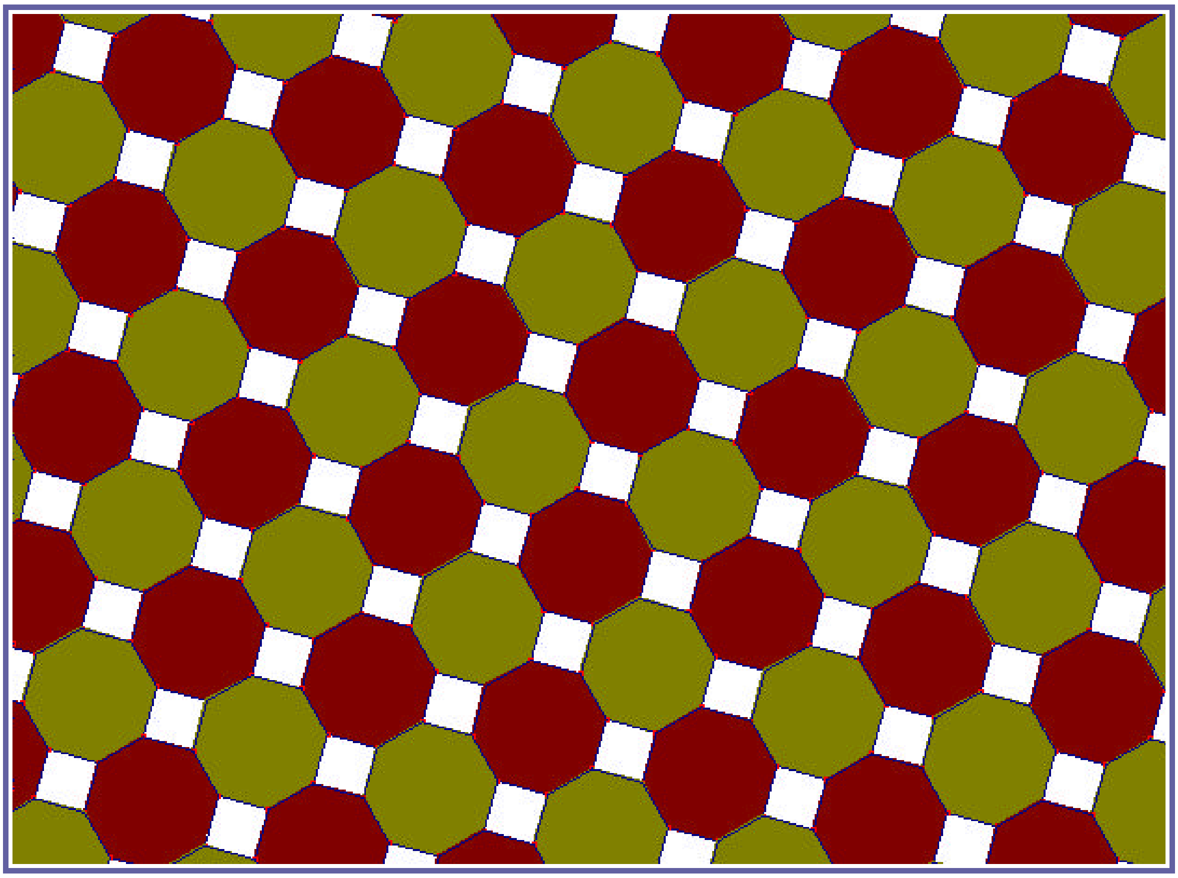
TESSEL·LACIÓ SEMIREGULAR A BASE DE QUADRATS, HEXÀGONS I DODECÀGONS (*n* = 3; 4; 6; 12)



INSTRUCCIONS PER AL DIBUIX

1. A partir de l'hexàgon regular inscrit construïu el dodecàgon regular inscrit.
2. Sobre un dels costats del dodecàgon construïu un quadrat. Traceu els punts mitjans i les mediatrius que calgui i a partir de les instruccions *simetria* i *simetria axial* comenceu la pavimentació.

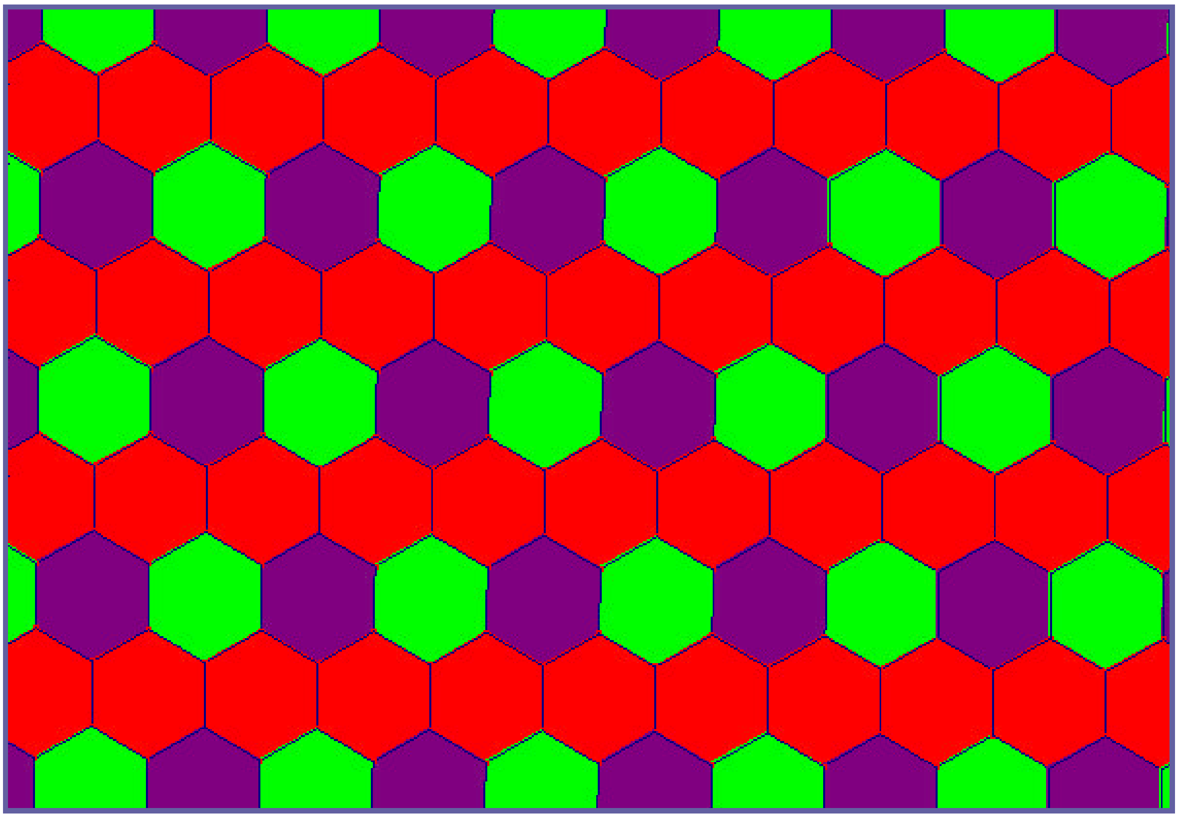
TESSEL·LACIÓ SEMIREGULAR A BASE DE QUADRATS I OCTÀGONS
(*n* = 3; 4; 8; 8)



INSTRUCCIONS PER AL DIBUIX

1. Construïu una circumferència i agafeu-hi un punt a sobre. Trobeu el simètric d'aquest punt respecte del centre i traceu el diàmetre que determinen. Traceu també la mediatriu d'aquest diàmetre i el quadrat inscrit que determinen els dos diàmetres.
2. Traceu les mediatrius del quadrat i l'octàgon regular inscrit.
3. Amb la instrucció *simetria axial* completeu la pavimentació.

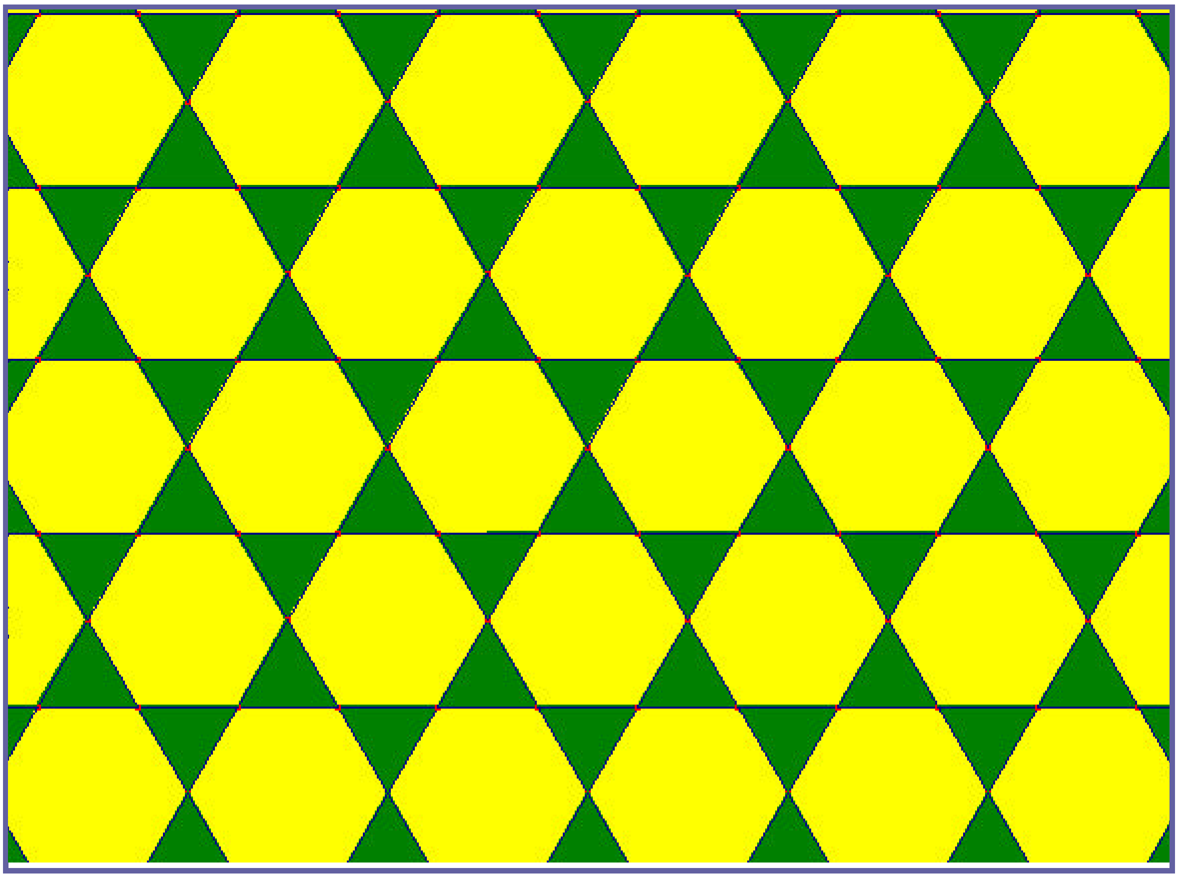
TESSEL·LACIÓ REGULAR A BASE D' HEXÀGONS (*n* = 3; 6; 6; 6)



INSTRUCCIONS PER AL DIBUIX

1. Construïu un hexàgon regular inscrit en una circumferència.
2. Amb la instrucció *simetria axial* completeu la pavimentació del pla.

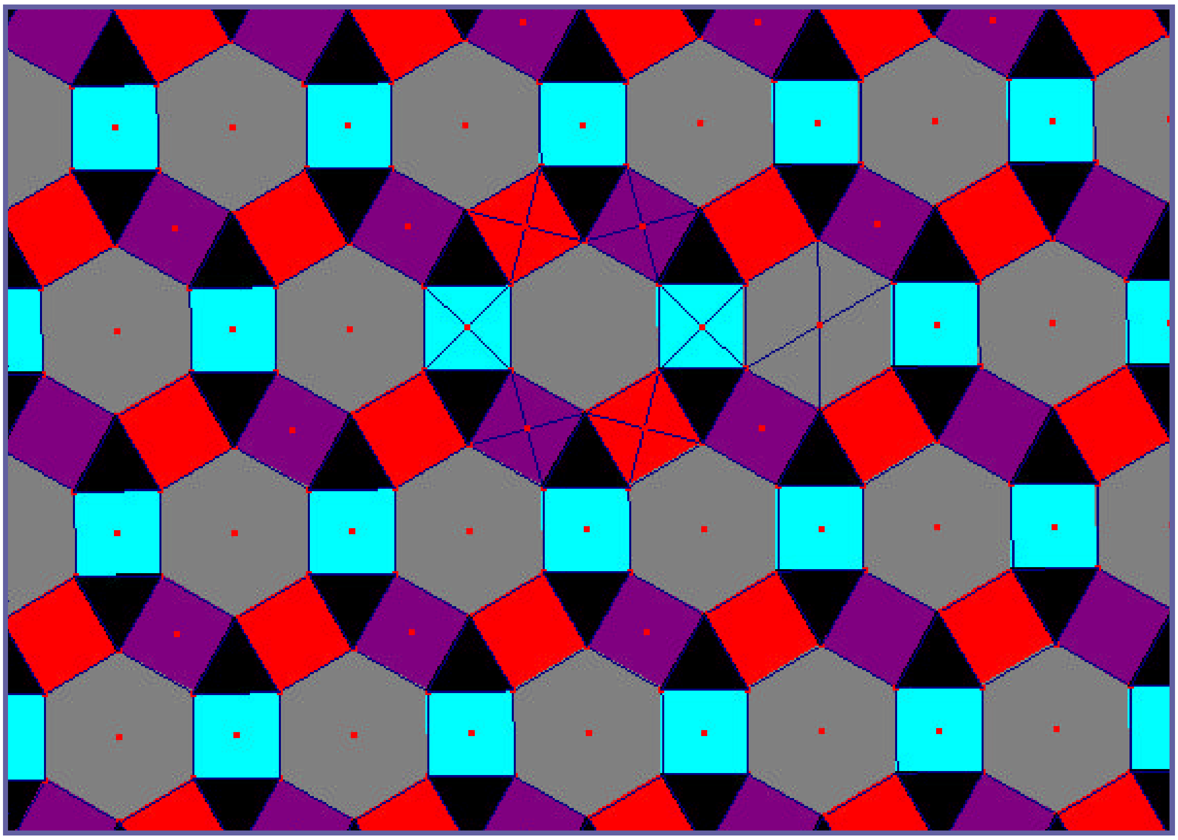
TESSEL·LACIÓ SEMIREGULAR A BASE DE TRIANGLES EQUILÀTERS I HEXÀGONS (*n* = 4; 3; 3; 6; 6)



INSTRUCCIONS PER AL DIBUIX

1. Construïu un hexàgon regular inscrit en una circumferència.
2. Amb la instrucció *simetria* feu la pavimentació del pla.

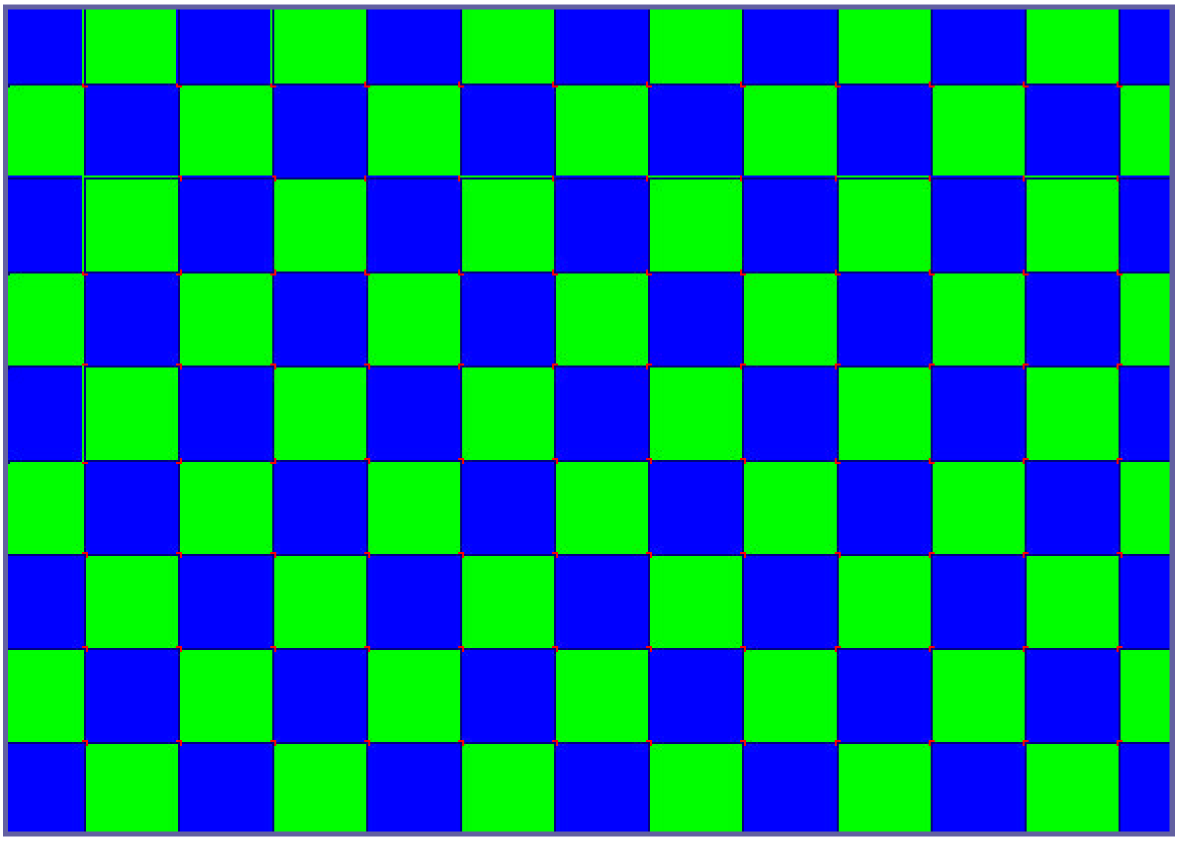
TESSEL·LACIÓ SEMIREGULAR A BASE DE TRIANGLES EQUILÀTERS, QUADRATS I HEXÀGONS (n = 4; 3; 4; 4; 6)



INSTRUCCIONS PER AL DIBUIX

1. Construïu una circumferència i un hexàgon regular inscrit.
2. Construïu un quadrat sobre cadascun del seus costats.
3. Trobeu el centre de tots els polígons.
4. Empreu la instrucció *simetria* per construir la base de la pavimentació.
5. Completeu els polígons que calgui amb la instrucció *polígon*.
6. Reitereu la instrucció *simetria* i completeu la pavimentació.

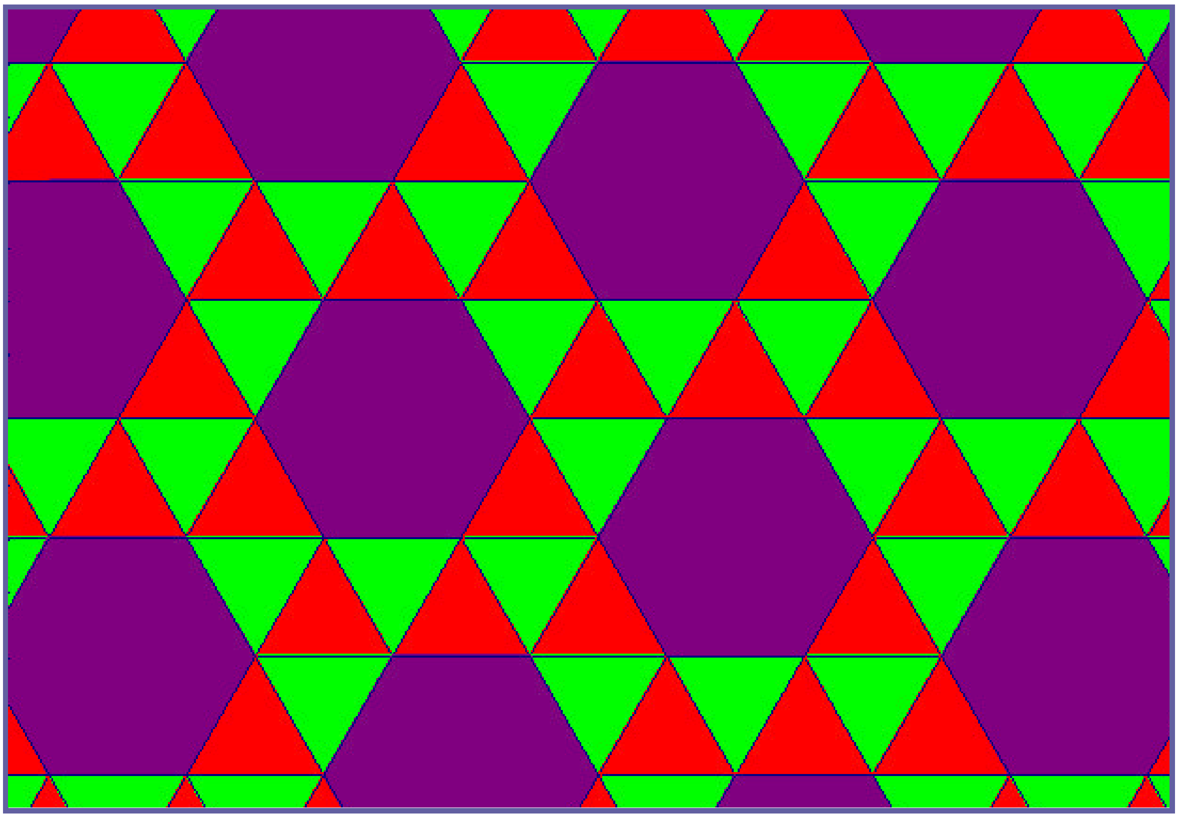
TESSEL·LACIÓ REGULAR A BASE DE QUADRATS (*n* = 4; 4; 4; 4)



INSTRUCCIONS PER AL DIBUIX

1. Construïu un quadrat a partir d'un segment amb les instruccions *perpendicular* i *circumferència centre-punt*.
2. Amb la instrucció *simetria* dibuixeu la tessel·lació del pla a base de quadrats.

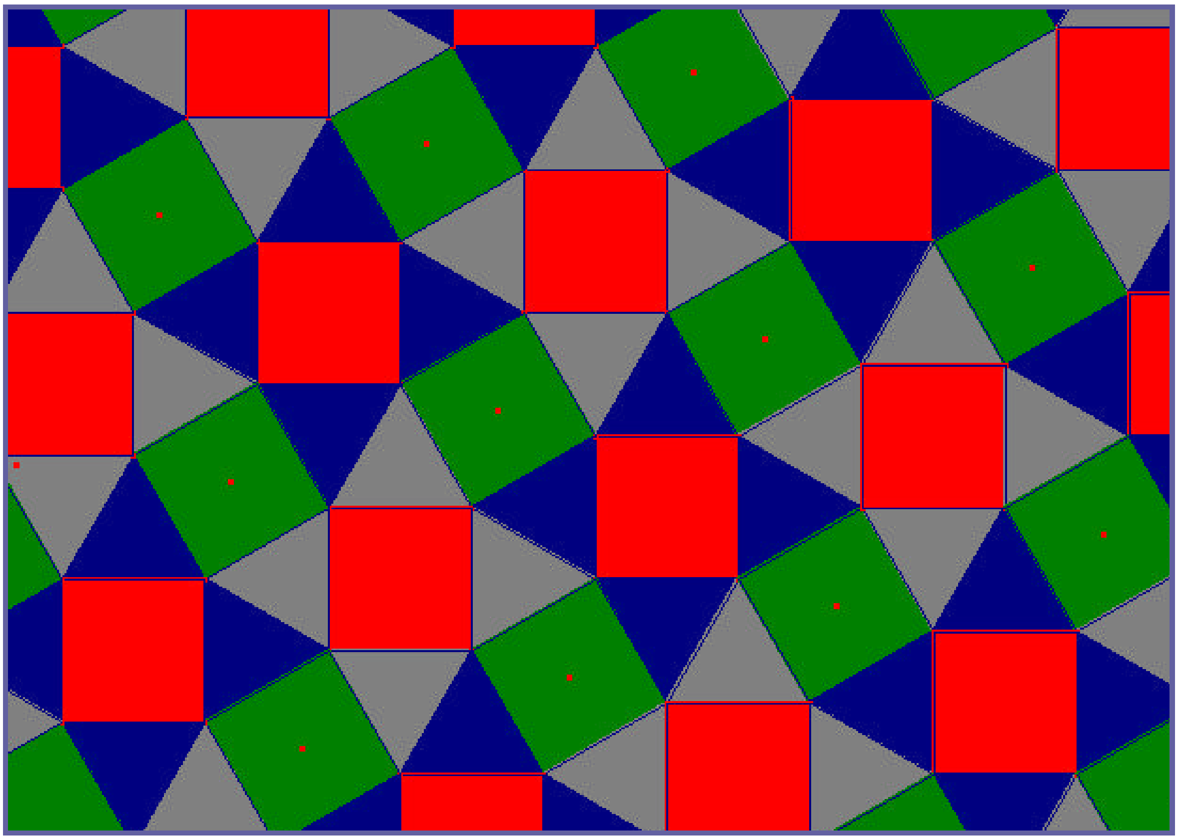
TESSEL·LACIÓ SEMIREGULAR A BASE DE TRIANGLES EQUILÀTERS I HEXÀGONS (n = 5; 3; 3; 3; 3; 6)



INSTRUCCIONS PER AL DIBUIX

1. Construïu un triangle equilàter.
2. Amb la instrucció *simetria axial* completeu la pavimentació del dibuix.

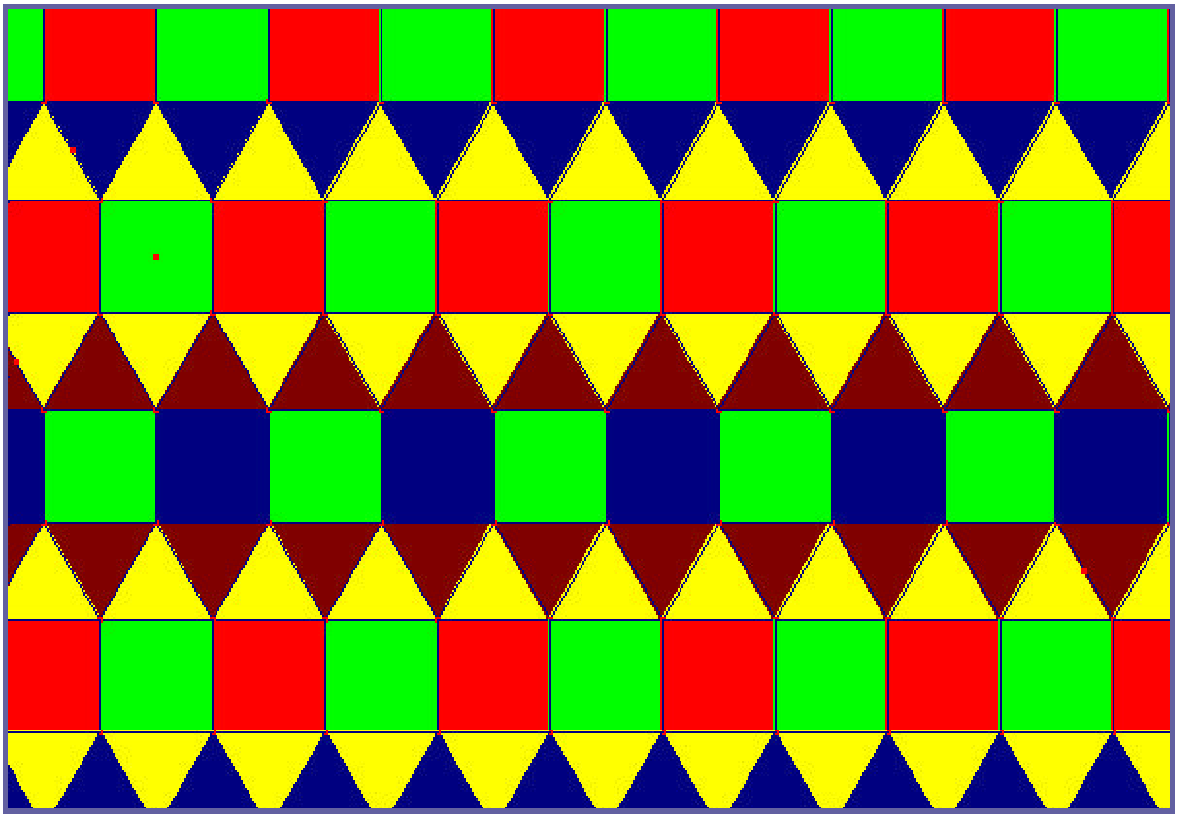
TESSEL·LACIÓ SEMIREGULAR A BASE DE TRIANGLES EQUILÀTERS I QUADRATS (n = 5; 3; 3; 3; 4; 4)



INSTRUCCIONS PER AL DIBUIX

1. Construïu un quadrat i dos triangles equilàters sobre els seus costats.
2. Trobeu el centre del quadrat i amb la instrucció *simetria* construïu els altres dos triangles equilàters sobre els seus costats.
3. Traceu les mediatrius que convingui i determineu els centres que calgui i amb les instruccions *simetria axial* i *simetria* aneu completant la pavimentació.

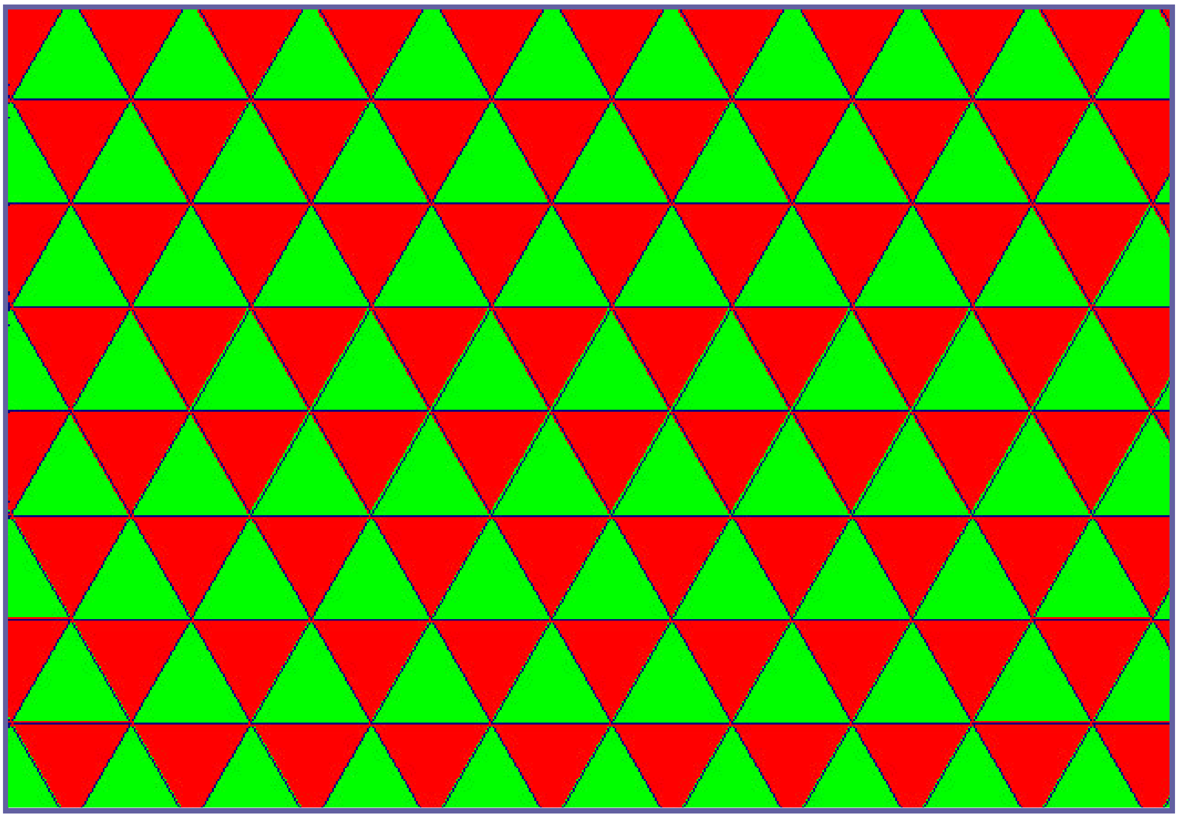
TESSEL·LACIÓ SEMIREGULAR A BASE DE TRIANGLES EQUILÀTERS I QUADRATS (n = 5; 3; 3; 3; 4; 4)



INSTRUCCIONS PER AL DIBUIX

1. Construïu un triangle equilàter i un quadrat sobre un del seus costats.
2. Amb la instrucció *simetria axial* completeu les files de quadrats i de triangles.
3. Per completar la pavimentació i passar a noves files empreu la instrucció *simetria*.

TESSEL·LACIÓ REGULAR A BASE DE TRIANGLES EQUILÀTERS
(n = 6; 3; 3; 3; 3; 3; 3)



INSTRUCCIONS PER AL DIBUIX

1. Construïu un triangle equilàter.
2. Amb la instrucció *simetria axial* completeu la pavimentació.

ANNEX 3. INDICACIONS I COMENTARIS PER A LES RESOLUCIONS

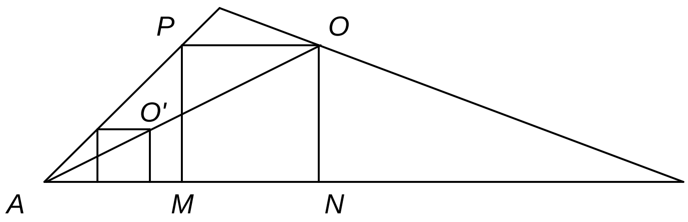
En aquest annex el lector trobarà les solucions d'alguns dels exercicis i problemes proposats -els més rellevants i els més complexos- a la resta de llibre. En general, només es dóna una resolució o una indicació significativa de la resolució. És evident que hi ha resolucions alternatives a les presentades.

A3.1. RESOLUCIONS DELS EXERCICIS I DELS PROBLEMES DEL CAPÍTOL 1

Enunciat 1 (Polya)

Es pot construir un quadrat "inscrit" en un triangle donat? (Un costat del quadrat ha de recolzar-se en un dels costats del triangle i els altres dos vèrtexs del quadrat han d'estar, respectivament, sobre els dos costats restants del triangle.)

La resolució és força senzilla. S'inscriu un quadrat "petit" i es troba el demanat (vegeu el dibuix).



Es poden fer algunes preguntes més:

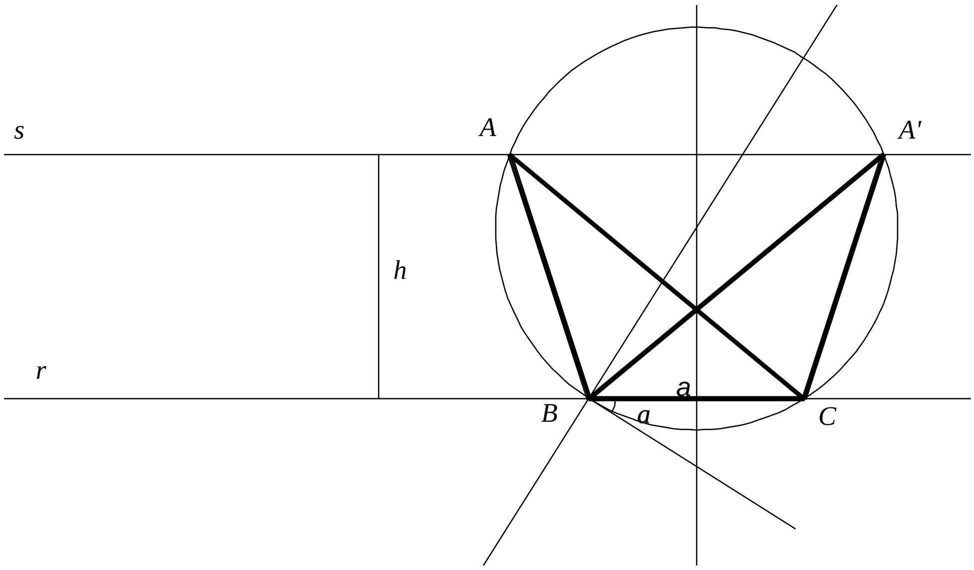
També s'hi val si l'angle és obtús o recte?
La solució és única?
Podríem generalitzar-ho a rectangles de proporcions donades?
Podríem fer-ho amb altres polígons?

Enunciat 2 (Polya)

Construïu un triangle donats un costat a, l'altura perpendicular a aquest costat h i l'angle A oposat al costat a.

Es comença col·locant el costat a sobre una recta r.
Es traça una paral·lela s a r que en disti h.
Es traça l'arc capaç corresponent a l'angle α i al costat a.

Es talla l'arc capaç amb la recta *s* i s’obté el triangle demanat (de fet, hi ha dues solucions simètriques *ABC* i *A’BC*).



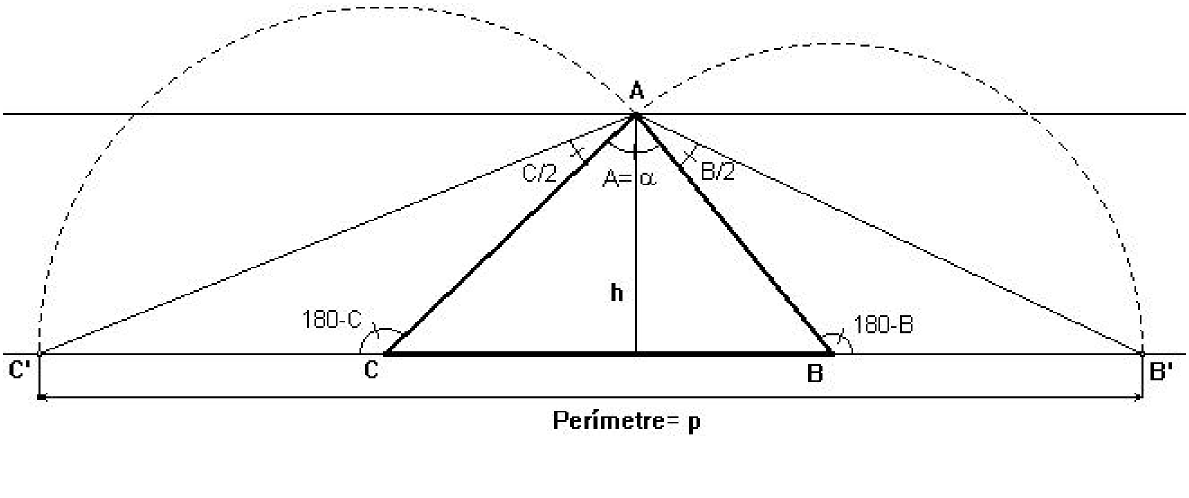
A3.2. RESOLUCIONS DELS EXERCICIS I DELS PROBLEMES DEL CAPÍTOL 2

Enunciat 3 (Polya)

Construïu un triangle donats un angle α (relatiu al vèrtex *A*), l'altura *h* corresponent al vèrtex *A* i el seu perímetre *p*.

Imagineu la solució construïda *ABC* i traceu sobre la recta *CB* segments *BB’* i *CC’* iguals, respectivament, a *AB* i *AC*. L’angle sota el qual es veu el perímetre *p* des del punt *A* és:

$$\frac{C}{2}+A+\frac{B}{2}=\frac{C+A+B}{2}+\frac{A}{2}=90^{0}+\frac{A}{2}$$



Un cop vist això tot resulta anàleg al problema *2*:

Es col·loca el perímetre *p* sobre una recta *r*.

Es traça una paral·lela *s* a *r* a distància *h* (l'altura donada).

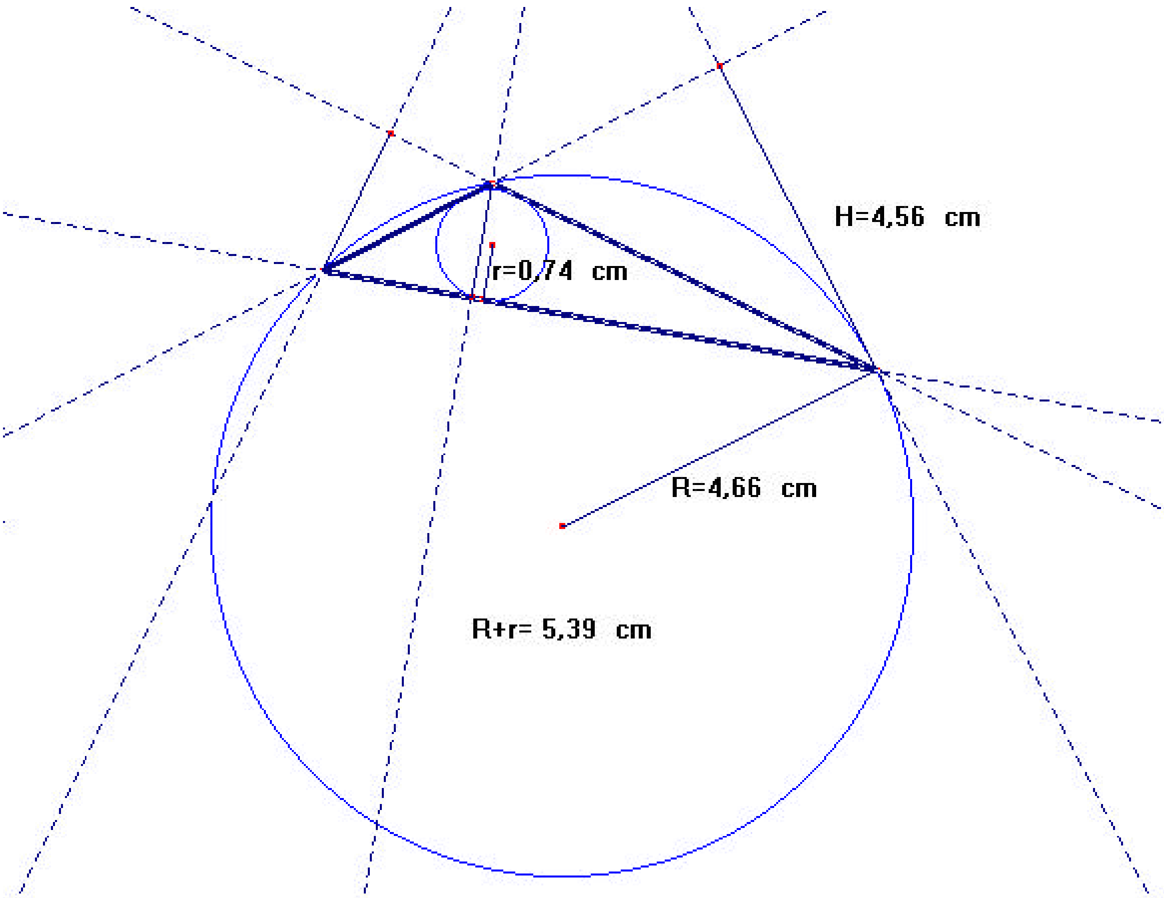
Es traça l'arc capaç associat a *p* i 90º+(α/2) i es talla amb *s***.** S'obté així el punt *A* (i un punt *A'* que ens donaria una solució simètrica).

Es traça *AB'* (extrem del perímetre) i *AC'* (l'altre extrem del perímetre). Les seves mediatrius donen els vèrtexs *B* i *C*, respectivament.

Enunciat 4 (Polya)

Dibuixeu un triangle i les circumferències inscrita i circumscrita. Siguin *r* i *R* els seus radis respectius i sigui *H* la més gran de les altures del triangle. És cert que $r+R \leq H$? Investigueu-ho.

La desigualtat és manifestament falsa. N'hi ha prou de veure-ho amb algun triangle obtusangle, en el qual quedi ben clar. També és possible emprar el programa Cabri i els instruments de mesura i de càlcul que ofereix. Es construeix un triangle amb les circumferències inscrita i circumscrita i les tres altures; amb la instrucció *calcular* es pot tenir en pantalla la suma *R*+*r* i comparar amb la mesura de la més gran de les tres altures.



A3.3. RESOLUCIONS DELS EXERCICIS I DELS PROBLEMES DEL CAPÍTOL 3

A l'apartat *3.3.2* d'aquest capítol es presentava l'activitat "*Altures i triangle òrtic*". Tot i que admet un treball relativament simple per a l'alumnat, comporta algunes dificultats, especialment, si es volen demostracions rigoroses d'alguns dels passos. Aquí s'intentarà aclarir aquests passos. Aquest era l'enunciat de l'activitat:

ACTIVITAT 1: ALTURES I TRIANGLE ÒRTIC

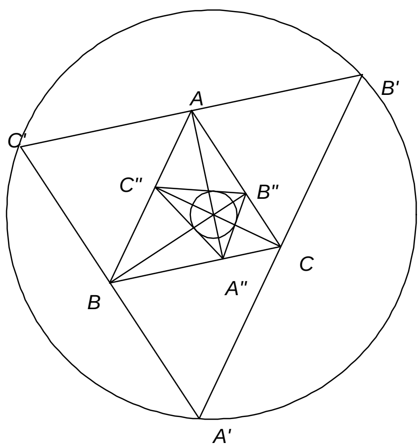
1. Construïu un triangle acutangle qualsevol *ABC*.
2. Traceu les rectes perpendiculars a cada costat pel vèrtex oposat. Com s'anomenen aquestes rectes? Quina propietat compleixen?
3. Distingiu i anomeneu els segments que són altures. Determineu, aproximadament, l'àrea del triangle amidant les tres altures i les tres bases, i compareu els resultats.
4. Traceu paral·leles a cada costat pel vèrtex oposat. Obtindreu un nou triangle *A'B'C'*. Quina relació hi ha entre els dos triangles? (Pista: mesureu-ne angles.)
5. Quines són les mediatrius del nou triangle? Quin és el seu circumcentre?
Dibuixeu la circumferència que passa per *A'*, *B'* i *C'*.
6. Uniu els peus de les altures del triangle *ABC*. Obtindreu el triangle òrtic.
Quina relació tenen les altures del triangle *ABC* amb el triangle òrtic? Traceu la circumferència inscrita en el triangle òrtic.
7. Feu el mateix amb un triangle obtusangle i amb un triangle rectangle. Què observeu?

Els apartats que comporten dificultats són el *5* i el *6*. Certament, si es tracten des d'un punt de vista intuïtiu no hi ha grans problemes. Ara bé, si es volen demostrar les conjectures ja és més complicat.

En el *5* cal fer la conjectura següent:

> "Les mediatrius del nou triangle són les altures del triangle inicial i, per tant, el circumcentre del nou triangle coincideix amb l'ortocentre del triangle inicial."

El dibuix corresponent és el següent:



Aquesta és la demostració:

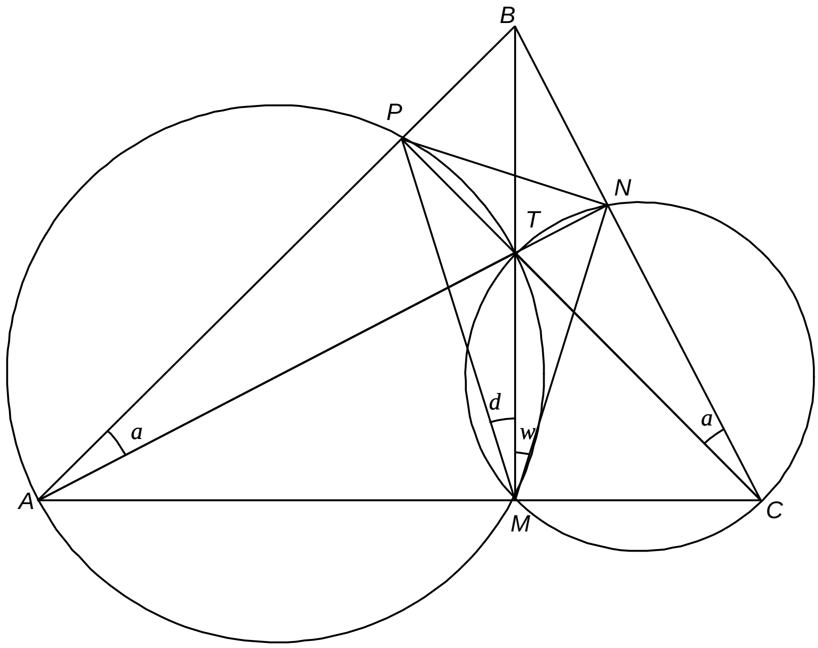
> Per construcció es té *AB'*∥*BC* i *CB'*∥*AB*, per tant, *ABCB'* és un paral·lelogram i els seus costats oposats han de ser iguals. En particular tenim que *AB* = *CB'*.
> Anàlogament es prova que *AB* = *A'C*.
> En definitiva s'ha provat que *C* és el punt mitjà del segment *A'B'* i, per tant, l'altura per *C* del triangle *ABC* és una de les mediatrius del triangle *A'B'C'*.

Es comenta, finalment, l'apartat *6*, que és el que presenta més dificultats.

En aquest cas els alumnes han de fer la conjectura següent:

> "Les altures del triangle inicial són les bisectrius del triangle òrtic i, per tant, l'incentre del triangle òrtic coincideix amb l'ortocentre del triangle inicial."

Cal fer un nou dibuix que permeti seguir els raonaments:



Es tracta de provar que, per exemple, els angles ***d*** i ***w*** són iguals (amb la qual cosa l'altura *BM* és també la bisectriu per *M* del triangle òrtic).

En primer lloc es té que $\widehat{NAB} = \alpha = \widehat{BCP}$ ja que aquests dos angles tenen els costats perpendiculars per construcció (*NA*⊥ *BC i CP*⊥ *AB*).

En segon lloc es constata que els quadrilàters *AMPT* i *CMTN* són inscriptibles en una circumferència, perquè tenen els vèrtexs oposats que sumen 180º (o també: la circumferència de centre en el punt mitjà del segment *AT* que passa per *M*, també passa per *A*, *T* i *P* ja que *ATM* i *ATP* són triangles rectangles).

Aleshores, es té:

$\widehat{TMP} = \delta = \widehat{TAP} = \alpha$, ja que els dos angles abasten el mateix arc
$\widehat{TMN} = \omega = \widehat{TCN} = \alpha$, ja que els dos angles abasten el mateix arc

Es conclou, doncs, que $\delta = \omega$.

Enunciat 5

Trobeu l'única terna pitagòrica els nombres de la qual estan en progressió aritmètica.

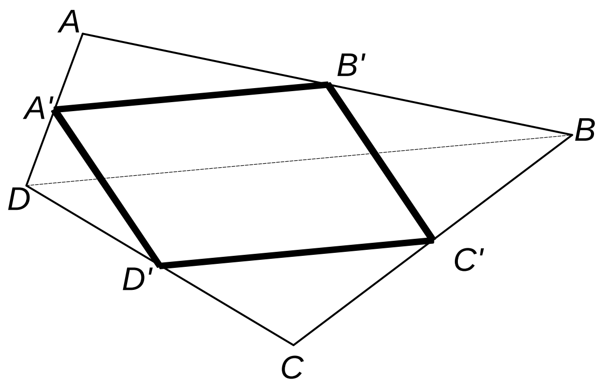
La resolució és força senzilla. Si els nombres que formen la terna són x, $x + a$ i $x + 2a$ amb $a>0$ i es tracta d'una terna pitagòrica, es complirà l'equació:

$$x^2 + (x+a)^2 = (x+2a)^2 \Leftrightarrow x^2 + x^2 + a^2 + 2xa = x^2 + 4a^2 + 4xa \Leftrightarrow x^2 - 2ax - 3a^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = a \pm \sqrt{a^2 + 3a^2} = a \pm 2a$$

En ser $x>0$ es conclou que $x = 3a$. La terna és, doncs, de la forma $3a$, $4a$, $5a$. Per a $a = 1$ obtenim la terna pitagòrica primitiva, és a dir, sense divisors comuns (3, 4, 5), que genera totes les altres ternes pitagòriques que compleixen les condicions de l'enunciat.

Enunciat 6 (teorema de Varignon)

Considereu un quadrilàter qualsevol i uniu-ne els punts mitjans dels costats. Demostreu que sempre s'obté un paral·lelogram d'àrea meitat que la del quadrilàter.



Si es traça la diagonal *DB*, s'observa que els triangles *AA'B'* i *ADB* són semblants amb raó de semblança ½. El mateix passa amb els triangles *DBC* i *D'C'C*. Per tant, *A'B'*‖*DB* ‖ *D´C'* i *A'B'*=*D'C'*= ½ (*DB*).

Pel que fa a les àrees es té:

àrea(*ABCD*) = *S*(*ABCD*) = *S*(*A'B'C'D'*)+*S*(*A'B'A*)+*S*(*D'C'C*)+*S*(*B'C'B*)+*S*(A'D'D) =
= *S*(*A'B'C'D'*)+ (1/4) [*S*(*ABD*)+*S*(*CBD*)]+(1/4)[*S*(*ACB*)+*S*(*ACD*)].

Si ara s'aïlla l'àrea del paral·lelogram, ja es té el resultat que es volia provar:

S(*A'B'C'D'*) = *S*(*ABCD*)- (1/4) [*S*(*ABD*)+*S*(*CBD*)]+(1/4)[*S*(*ACB*)+*S*(*ACD*)] =
= *S*(*ABCD*)- (1/4) [*S*(*ABCD*)]- (1/4) [*S*(*ABCD*)] = ½ *S*(*ABCD*)

A3.4. SOLUCIONS DELS EXERCICIS I DELS PROBLEMES DEL CAPÍTOL 4

Enunciat 7

Dibuixeu els desenvolupaments plans de l'octàedre regular.

La feina de trobar tots els desenvolupaments plans de l'octàedre no és gaire senzilla i pot comportar una bona estona de reflexió. Pot ser convenient investigar amb l'ajut de Creator (o d'algun material similar), ja que això facilita molt la reflexió. Es poden fer algunes deduccions prèvies:

1. No hi ha d'haver més de quatre triangles en un vèrtex (a l'octàedre tots els vèrtexs tenen quatre triangles).

2. Sempre apareix una "tira" de quatre triangles, com a mínim. Es pot arribar a aquesta conclusió des d'una perspectiva experimental: quan es posen tres triangles seguits i se n'afegeixen dos més, per força, s'obté una "tira" de quatre triangles.

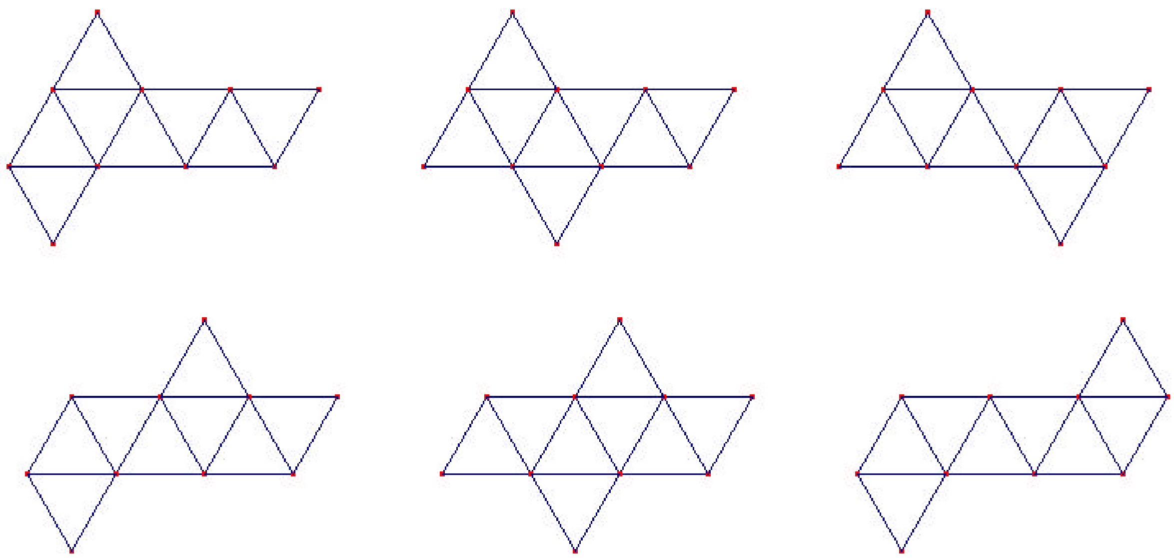
3. Amb "tires" de set no surt cap octàedre.

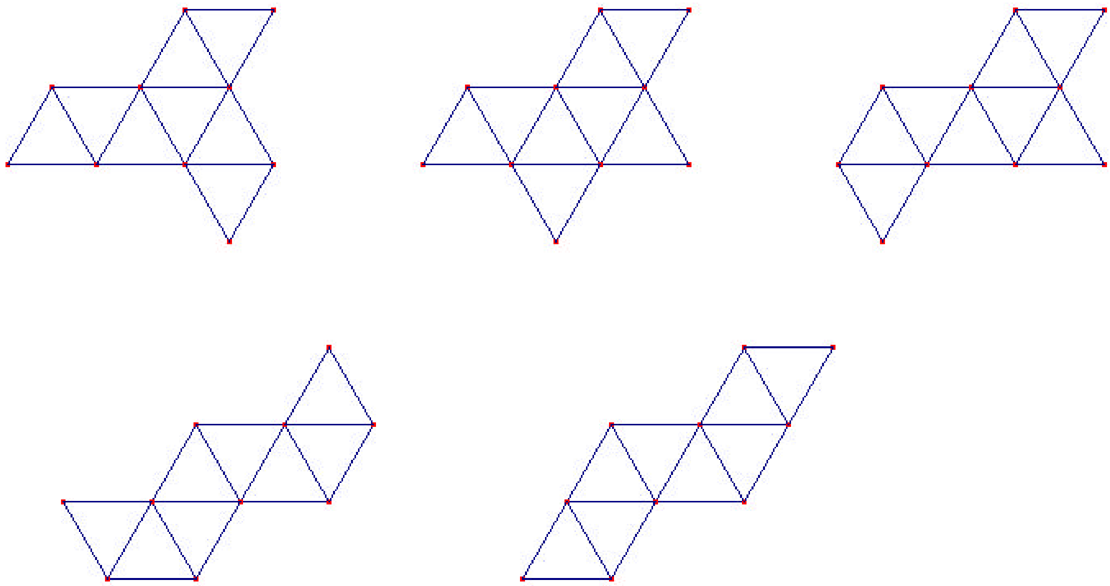
Després es pot començar pels desenvolupaments que contenen una tira de sis i actuar sistemàticament desplaçant els altres dos triangles i descartant les figures simètriques. En surten sis de diferents: les dues primeres files dibuixades.

A continuació es consideren els desenvolupaments amb una tira de cinc. Es tracta ara d'afegir tres triangles més sense fer aparèixer tires de sis tot i observant la regla 1. Només hi ha tres casos diferents (cal descartar tots els casos simètrics). Això és la tercera fila del dibuix.

Finalment, s'han de considerar els desenvolupaments que només tenen tires de quatre i en surten només dos de diferents: quarta fila del dibuix.

Tot plegat dóna onze desenvolupament plans per a l'octàedre. El mateix nombre que per al cub.



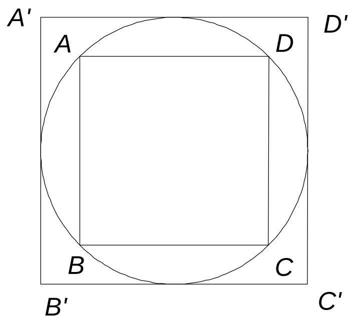


A3.5. SOLUCIONS DELS EXERCICIS I DELS PROBLEMES DEL CAPÍTOL 5

En primer lloc es comenten els dos exercicis de l'apartat *5.4.3*.

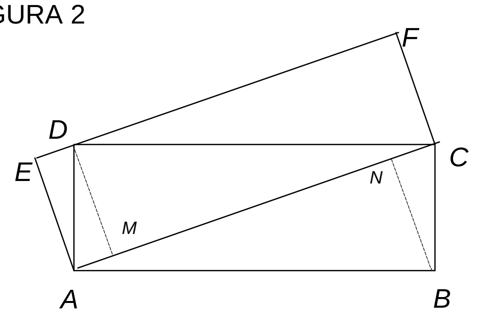
Donades les figures *1* i *2* que podeu veure a continuació: a) Quina superfície és més gran, la del quadrat interior o la compresa entre el quadrat interior i el quadrat exterior? (fig. *1*); b) Quin rectangle és de superfície més gran? (fig. *2*)

FIGURA 1



Si es fa girar 45º el quadrat *ABCD* es veu amb facilitat que les dues àrees són iguals.

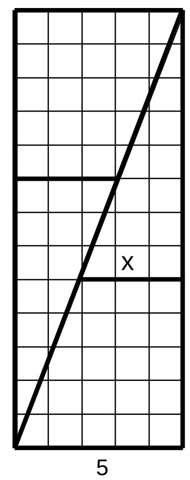
FIGURA 2



Es tracen les altures *DM* i *BN*. Aleshores és fàcil veure que els dos rectangles tenen la mateixa àrea: àrea *ABCD* = 2 àrea *CDA* = àrea *EACF*.

---

2. Observeu les figures següents: a primer cop d'ull les quatre peces en què queden dividits el rectangle i el quadrat són iguals; d’altra banda, el rectangle conté $5 \times 13 = 65$ quadradets i el quadrat en conté $8 \times 8 = 64$. Què és el que passa? Potser això demostra que 64 = 65?



Es fa una suposició oculta en considerar que x val 3, quan en realitat es pot calcular pel teorema de Tales i resulta que val 3 i escaig.

Efectivament es té que x és a 5, com 8 és a 13. Per tant, $x = 40/13 = 3'0769...$

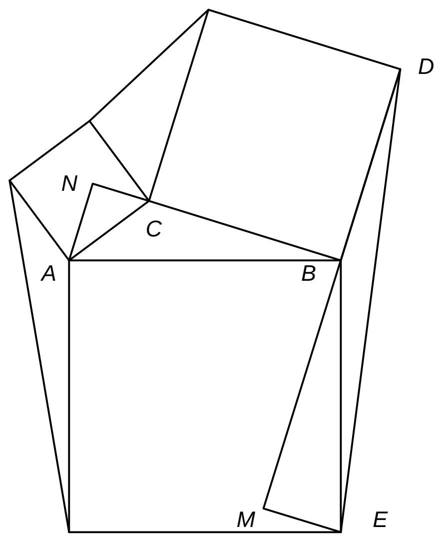
El quadradet perdut es reparteix entre les quatre peces i és difícil de detectar.

És interessant constatar que els tres nombres amb què es construeix l’enunciat, 5, 8 i 13, formen part de la successió de Fibonacci i que es poden dissenyar situacions anàlogues amb qualssevol tres termes consecutius d’aquesta successió. Així, per exemple, els termes 8, 13 i 21 portarien al 169 =168, amb un quadrat de 13 per 13 peces i un rectangle de 8 per 21 peces.

Enunciat 8 (teorema de Cross)

Agafeu un triangle qualsevol *T*. Construïu un quadrat sobre cada costat i uniu-ne els vèrtexs lliures. Obtindreu tres triangles més: *T*', *T*'' i *T*'''. Demostreu que els quatre triangles tenen la mateixa àrea.

És suficient veure, per exemple, que es té àrea *ABC* = àrea *BDE*, ja que els altres casos són anàlegs. Els dos triangles esmentats tenen, efectivament, la mateixa àrea, ja que tenen la mateixa base (*BD*=*BC* per construcció) i la mateixa altura (*ME* = *NA* en ser iguals els triangles *MBF* i *NAB*).



Enunciat 9

Proveu que l'únic triangle -sigui del tipus que sigui- amb els costats enters i tal que l'àrea coincideix amb el semiperímetre és el de costats 3, 4 i 5.

Si els costats són *a*, *b* i *c* i el semiperímetre és *p*, de la fórmula d'Heró s'obté l'equació:

$$(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)= p$$

Si es posa $x = p-a$, $y = p-b$ i $z = p-c$ s'obtenen les equacions següents:

$$x+y+z = p \quad \text{i} \quad xyz = p$$

Per tant:

$$xyz = x+y+z$$

Equivalent a:

$$\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}=1$$

Si es posa $yz = u$, $xz = v$ i $xy = w$, es té:

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=1 \text{ amb } u, v \text{ i } w \text{ naturals.}$$

Si se suposa que $u \leq v \leq w$ s'obtenen les fites següents:

$$\frac{3}{w} \leq 1 \leq \frac{3}{u} \Rightarrow w \geq 3 \text{ i } u \leq 3$$

A partir d'aquí es destrien sense dificultat tots els casos que porten a l'única solució:

$a = 3$, $b = 4$ i $c = 5$.

Enunciat 10

Només hi ha dos triangles pitagòrics les àrees dels quals coincideixin amb els seus perímetres. Trobeu-los.

Es tracta novament d'un problema amb resolució algèbrica. Tot surt sense dificultats si s'aplica el teorema següent referent a les ternes pitagòriques.

Si x, y i z és una terna pitagòrica, existeixen un enter d i dos enters primers entre ells u i v tals que (excepte permutació de x i y):

$$x = d(u^2-v^2), \quad y = 2duv \quad \text{i} \quad z = d(u^2+v^2)$$

Si es planteja l'equació $x+y+z = (xy)/2$ i se substitueixen les expressions anteriors, es pot simplificar i es va a parar a l'equació:

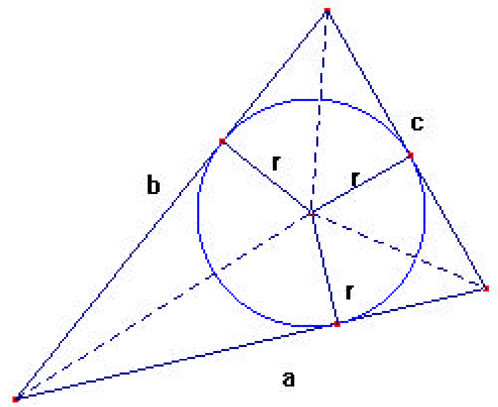
$$2 = d \cdot v \cdot (u-v)$$

Les úniques solucions de la qual són:

$x = 6$, $y = 8$, $z = 10$ i $x = 5$, $y = 12$, $z = 13$.

El problema es pot resoldre també sense fer ús del teorema referent a les ternes pitagòriques. Una resolució interessant consisteix a considerar la circumferència inscrita. Es té el teorema següent:

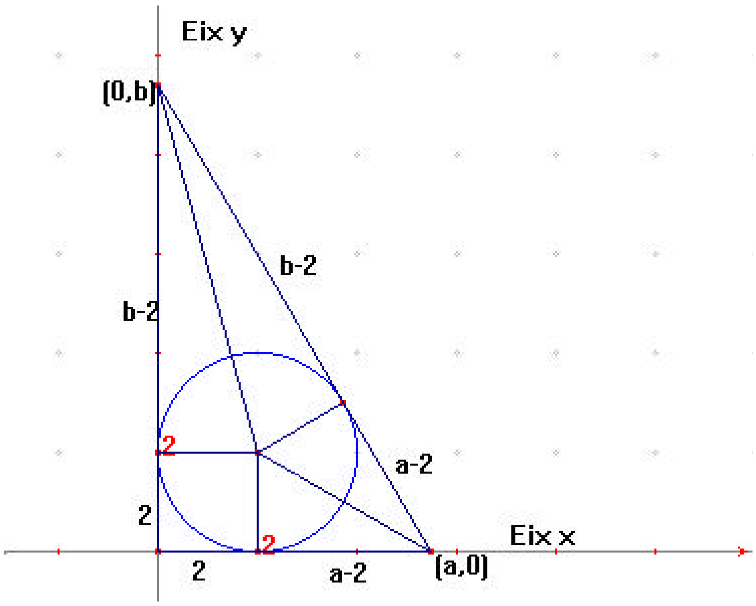
1. Per a qualsevol triangle: perímetre = àrea $\Leftrightarrow$ el radi r de la circumferència inscrita val 2.



Efectivament, només cal descompondre el triangle en sis triangles rectangles com en el dibuix. L'altura dels sis triangles rectangles és r i la suma de les seves bases és el perímetre del triangle inicial. Per tant, es té:

$$S = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = p \cdot r = 2p \Leftrightarrow r = 2 \text{ (on } p \text{ és el semiperímetre)}$$

Ara es pot esbrinar quants triangles rectangles hi ha que tinguin circumferència inscrita de radi 2. Es pot posar el triangle sobre uns eixos de coordenades cartesianes per tal de facilitar els càlculs.



Amb el programa Cabri es pot fer una investigació experimental que deixa les coses prou clares. Només cal agafar un punt sobre el semieix positiu d'abscisses i traçar la recta tangent a la circumferència de centre (2,2) i radi 2. En moure el punt s'observen tots els triangles rectangles que compleixen la condició exigida. També és possible esbrinar experimentalment quins d'aquests triangles tenen costats enters.

Amb més precisió, es té el resultat següent:

3. $\forall a > 4 \Rightarrow \exists b$ tal que el triangle rectangle de catets a i b té circumferència inscrita de radi 2

Efectivament es pot calcular b en aplicar el teorema de Pitàgores:

$$a^2 + b^2 = (a-2+b-2)^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = ((a+b)-4)^2 = a^2 + b^2 + 2ab + 16 - 8(a+b) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 = ab + 8 - 4a - 4b \Leftrightarrow b = \frac{4a-8}{a-4}$$

Finalment també es poden estudiar els casos en què a i b són nombres enters i en què a, b i a^2+b^2 formen, doncs, una terna pitagòrica.

Se sap que ha de ser $a>4$. Per tant, el primer valor possible d'a és $a = 5$. Aquest valor proporciona el valor màxim de b (vegeu el dibuix):

$$a = 5 \Rightarrow b = \frac{4 \cdot 5 - 8}{5-4} = 12$$

A continuació només cal estudiar els casos en què $4< b <12$. Només surten les solucions $a = 6$ i $b = 8$ o $a = 8$ i $b = 6$.

Es conclou, doncs, que els únics triangles rectangles de costats enters (ternes pitagòriques) que tenen el perímetre igual a l'àrea són els de catets $a = 6$ i $b = 8$ o $a = 5$ i $b = 12$.

A3.6. SOLUCIONS DELS EXERCICIS I DELS PROBLEMES DEL CAPÍTOL 6

En primer lloc es comenten dos dels exercicis de geometria analítica amb Cabri de l'apartat *6.3.3.2*.

---

3. Donada la circumferència d'equació $x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0$, trobeu:

a) El centre i el radi. Representeu-la.

b) L'equació de la recta tangent pel punt (0,0).

c) L'equació d'una circumferència concèntrica que sigui tangent a la recta $x + y = 4$.

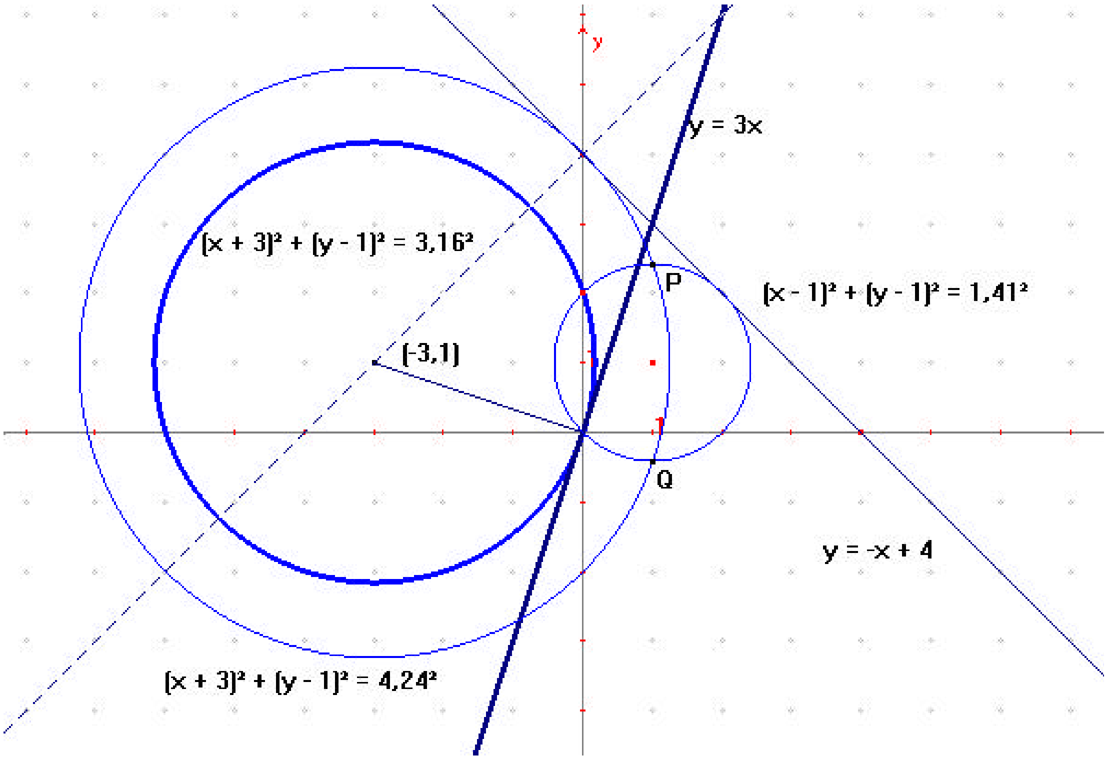
d) Les interseccions d'aquesta circumferència amb la circumferència de centre $A = (1,1)$ i radi $r = \sqrt{2}$.

Es troben el centre i el radi readaptant l'equació $x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0$ a la seva forma canònica:

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-1)^2 = 10$$

Ara es poden reconèixer de forma explícita el centre $C = (-3,1)$ i el radi $R=\sqrt{10}$.

El dibuix amb Cabri és el següent:



La recta tangent demanada a l'apartat *b* és la perpendicular al radi en el punt (0,0): $y = 3x$.

El radi de la circumferència concèntrica del *c* és la distància del punt (-3,1) a la recta $x+y = 4$:

$$r = \left|\frac{-3+1-4}{\sqrt{2}}\right| = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

Per la qual cosa la circumferència demanada al c) és la següent:

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 18$$

Les interseccions que es demanen al darrer apartat són les solucions del sistema:

$$\begin{cases} (x+3)^2 + (y-1)^2 = 18 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \end{cases}$$

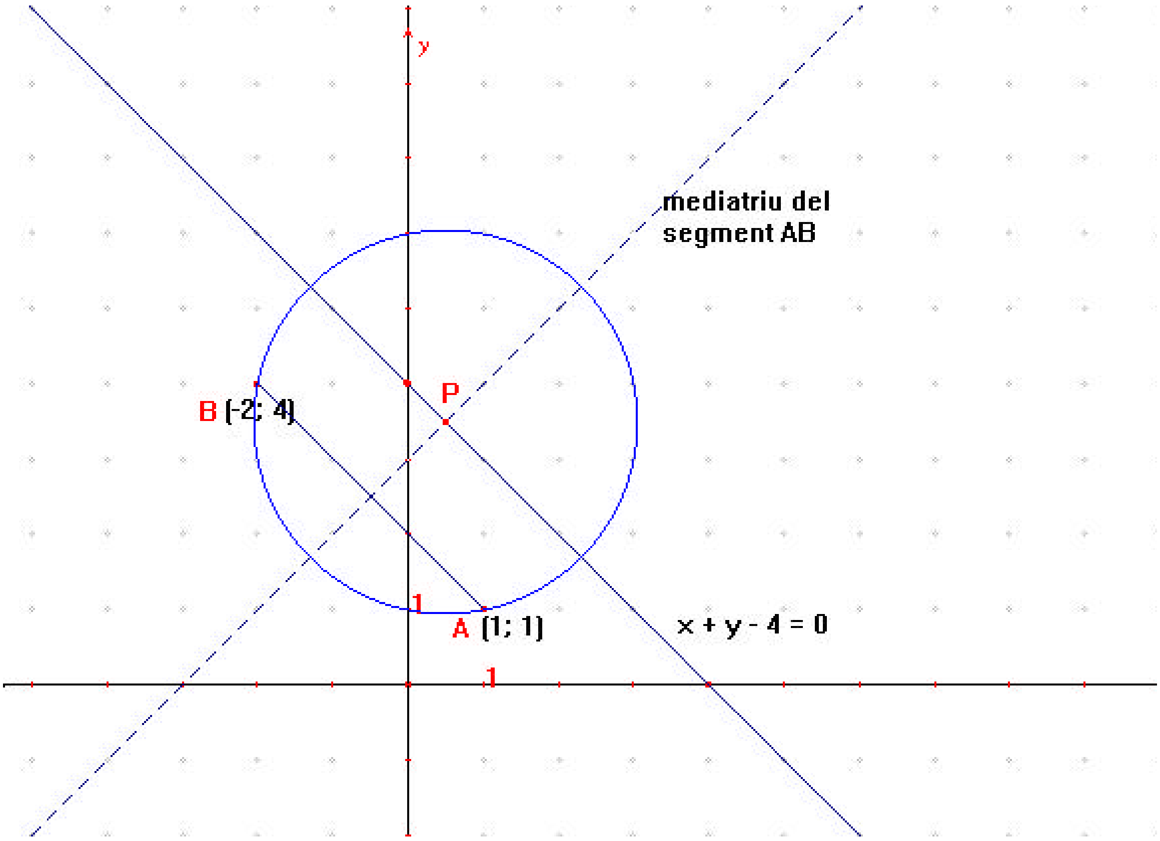
Això dóna els punts: $P = (1,1+\sqrt{2})$ i $Q = (1,1-\sqrt{2})$.

---

4. La circumferència *C* passa pels punts (1,1) i (-2, 4). Si sabem que el seu centre és sobre la recta *r*: $x+y = 4$ determineu-ne l'equació. Representeu gràficament la situació.

Si els alumnes volen construir geomètricament la solució tindran alguna dificultat. El dibuix amb Cabri permet fer una exploració: poden agafar un punt *P* sobre la recta donada i traçar la circumferència de centre *P* que passa per $A = (1,1)$; a continuació poden desplaçar *P* sobre la recta fins que la circumferència passi per $B = (-2,4)$. Aquesta, però, no és la solució vertadera i construïda del problema. Es tracta només d'una aproximació, i si demanen al programa si *C* passa per *B* els dirà que no.

La solució geomètrica es pot obtenir tallant la mediatriu del segment *AB* amb la recta que conté el centre.



L'equació de la mediatriu del segment *AB* és $x - y = -3$.

El centre *P* de la circumferència demanada és, doncs, la solució del sistema:

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Això dóna el punt $P = (0'5, 2'5)$.

El radi *R* de la circumferència *C* és la distància entre *P* i *A* o entre *P* i *B*:

$$R = \sqrt{0,5^2 + 2,5^2} = \sqrt{6,5}$$

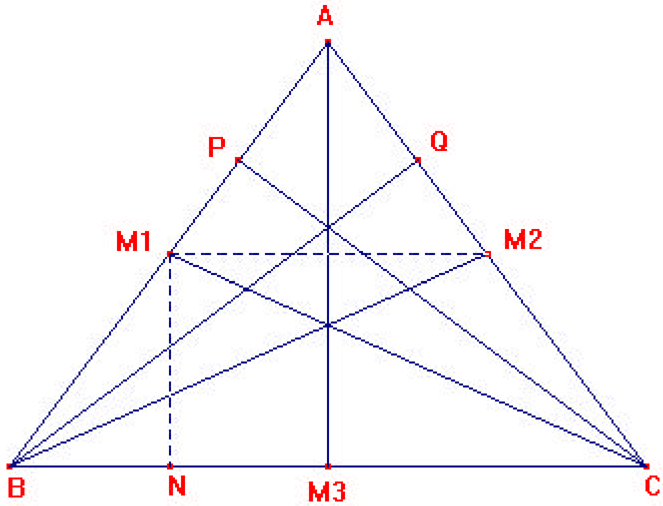
Per tant, la circumferència solució és la d'equació:

$$(x - 0,5)^2 + (y-3,5)^2 = 6,5$$

En segon lloc es comenten alguns dels problemes amb traducció algèbrica de l'apartat *6.3.3.3*. Es tracta de problemes amb alguna dificultat per a l'alumnat i que demanen l'ús dels teoremes de Tales (des de la perspectiva de la semblança de triangles) i de Pitàgores.

---

7. La base *BC* d'un triangle isòsceles mesura 42 cm i el costat *AB*, 35 cm. Trobeu les altures i les mitjanes del triangle.



L'altura AM_3 es troba sense cap dificultat:

$$AM_3 = \sqrt{AC^2 - CM_3^2} = \sqrt{35^2 - 21^2} = 28 \text{ cm}$$

Pel que fa a les altres dues altures $CP = BQ$, es poden calcular fàcilment aprofitant el fet que l'àrea és un invariant:

$$\text{Àrea } ABC = \frac{BC \cdot AM_3}{2} = \frac{42 \cdot 28}{2} = \frac{BA \cdot PC}{2} \Leftrightarrow PC = \frac{42 \cdot 28}{35} = 33,6\text{cm}$$

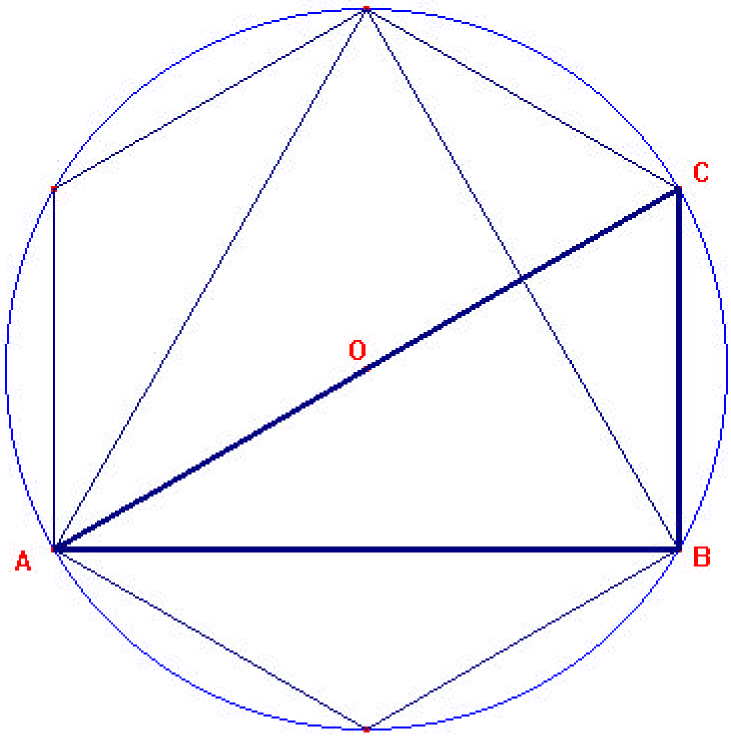
Les mitjanes $CM_1 = BM_2$ donen una mica més de feina. En primer lloc cal traçar la perpendicular per M_1 a la base i el segment $M_1 M_2$. El triangle $A\ M_1\ M_2$ és semblant al triangle *ABC* amb raó de semblança ½ per la qual cosa $N M_1$ = 14 cm. Ara es pot aplicar el teorema de Pitàgores al triangle $C\ M_1 N$:

$$CM_1 = \sqrt{CN^2 + NM_1^2} = \sqrt{31,5^2 + 14^2} \simeq 34{,}471 \text{ cm}$$

---

9. S'inscriu un triangle *ABC* en una circumferència de radi 5 de forma que *AB* és el costat del triangle equilàter inscrit i *BC* el de l'hexàgon. Trobeu els angles *A*, *B* i *C*, classifiqueu el triangle i calculeu l'àrea.

Un cop els alumnes tenen el dibuix fet, el problema no presenta gran dificultat. Hi ha la tendència a dir que el triangle *ABC* és rectangle sense fer cap càlcul ni cap comprovació, només des d'una perspectiva visual i intuïtiva.



Per tal de comprovar que efectivament es tracta d'un triangle rectangle, poden fer servir resultats referents a l'angle inscrit en una circumferència (el valor de l'angle inscrit és la meitat de l'arc abastat):

$$\hat{A} = \frac{arcBC}{2} = 30^{\circ};\ \hat{B} = \frac{arcCA}{2} = 90^{\circ} \text{ i } \hat{C} = \frac{arcAB}{2} = 60^{\circ}$$

També és possible comprovar que *ABC* és rectangle calculant els tres costats i estudiant si compleix el teorema de Pitàgores:

$$AB = 2\sqrt{OB^2 - OM^2} = 2\sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = 10\frac{\sqrt{3}}{2}\text{cm}$$

(S'ha aplicat el teorema de Pitàgores al triangle rectangle *OBM* per calcular el costat del triangle equilàter inscrit.)

BC = costat de l'hexàgon = radi = 5 cm
AC = doble del radi = 10 cm

I efectivament es té:

$$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2 \Leftrightarrow 10^2 = 5^2 + \left(10\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

14. Els costats d'un paral·lelogram mesuren 51 m i 24 m. La diagonal petita és perpendicular al costat menor. Calculeu:

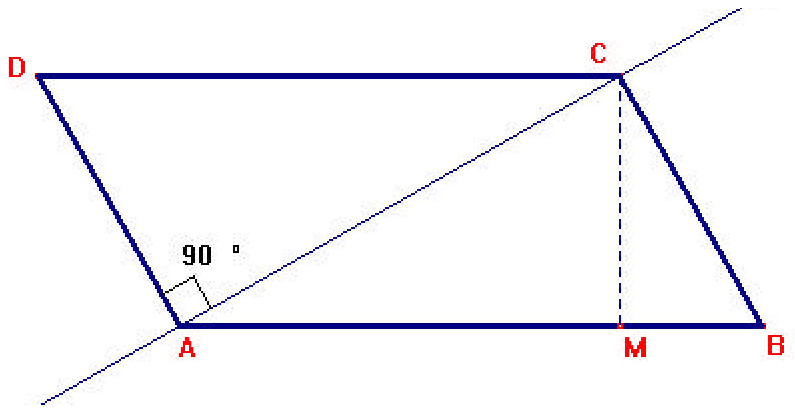
a) La diagonal menor.

b) L'àrea del paral·lelogram.

c) La distància entre els costats majors.

d) La distància entre els costats menors.

La clau del problema consisteix a fer un bon dibuix. Això passa necessàriament per traçar la perpendicular al segment que es tria com a costat menor.



Ara s'aplica el teorema de Pitàgores al triangle rectangle *ABC* per tal de calcular la diagonal menor (que coincideix amb la distància entre els costats menors, que també es demana):

$$(AC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2 \Leftrightarrow AC = \sqrt{51^2 - 24^2} = 45 \text{ cm}$$

L'àrea del paral·lelogram és:

$$\text{Àrea } ABCD = base \cdot altura = DA \cdot AC = 24 \cdot 45 = 1080 \text{ cm}^2$$

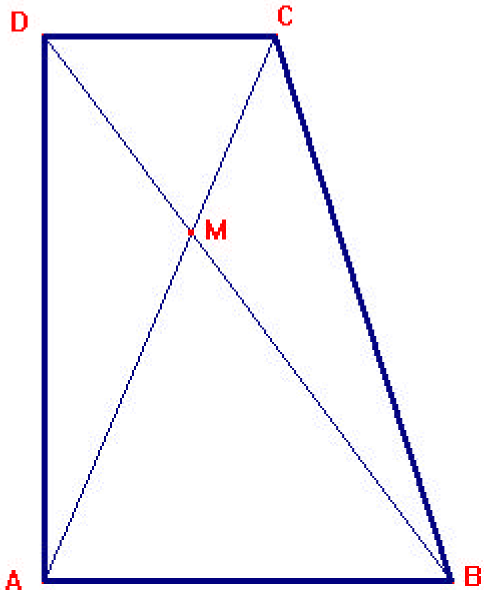
L'àrea també es pot calcular a partir del costat *AB* i això permet trobar fàcilment l'altura demanada *CM*:

$$\text{Àrea } ABCD = base \cdot altura = AB \cdot CM = 1080 = 51 \cdot CM \Leftrightarrow CM = \frac{1080}{51} \simeq 21,18 \text{ cm}$$

15. Les diagonals d'un trapezi rectangle mesuren 26 m i 30 m i la seva altura 24 m. Trobeu:

a) La seva àrea.

b) Les longituds dels segments en què les diagonals queden dividides pel punt d'intersecció.



Les bases del trapezi *DC* i *AB* es calculen sense dificultat en aplicar el teorema de Pitàgores als triangles rectangles *ADC* i *DAB*, respectivament:

$$(DC)^2 = (AC)^2 - (AD)^2 \Leftrightarrow DC = \sqrt{26^2 - 24^2} = 10 \text{ cm}$$
$$(AB)^2 = (DB)^2 - (AD)^2 \Leftrightarrow AB = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18 \text{ cm}$$

L'àrea del trapezi és, doncs:

$$\text{Àrea } ABCD = \frac{10+18}{2} \cdot 24 = 336 \text{ cm}^2$$

El càlcul de les longituds dels segments en què les diagonals queden dividides pel punt d'intersecció és més difícil. Cal emprar el teorema de Tales: els triangles *AMB* i *CDM* són semblants. Per tant, es té:

$$\frac{AM}{CM} = \frac{18}{10} \Leftrightarrow \frac{AM}{26-AM} = \frac{18}{10} \Leftrightarrow AM = \frac{18 \cdot 26}{28} = \frac{117}{7} \simeq 16{,}71 \text{ cm i } CM = 26\text{-}AM \simeq 9{,}29 \text{ cm}$$

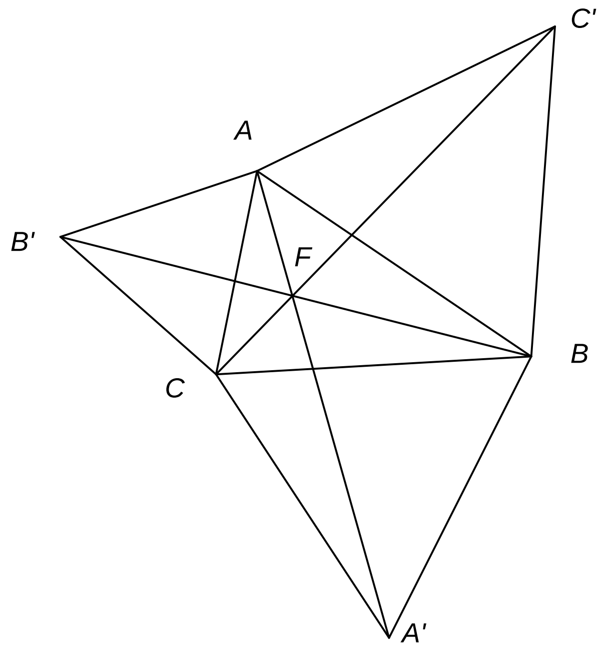
$$\frac{BM}{DM} = \frac{18}{10} \Leftrightarrow \frac{BM}{30-BM} = \frac{18}{10} \Leftrightarrow BM = \frac{18 \cdot 30}{28} = \frac{135}{7} \simeq 19{,}29 \text{ cm i } DM = 30\text{-}BM \simeq 10{,}71 \text{ cm}$$

Per acabar es resolen els tres problemes proposats al final del capítol.

Enunciat 11 (el punt de Fermat)

Sobre els costats d'un triangle qualsevol *T* construïm tres triangles equilàters. Si unim els vèrtexs lliures d'aquests triangles amb els vèrtexs oposats del triangle inicial, obtenim tres segments iguals que es tallen en un únic punt. Aquest és el punt de Fermat.

La igualtat dels segments *AA*', *BB*' i *CC*' és fàcil de comprovar ja que, per exemple, els triangles *ABB*' i *ACC*' són iguals (cal tenir en compte quins són els angles en *A*).

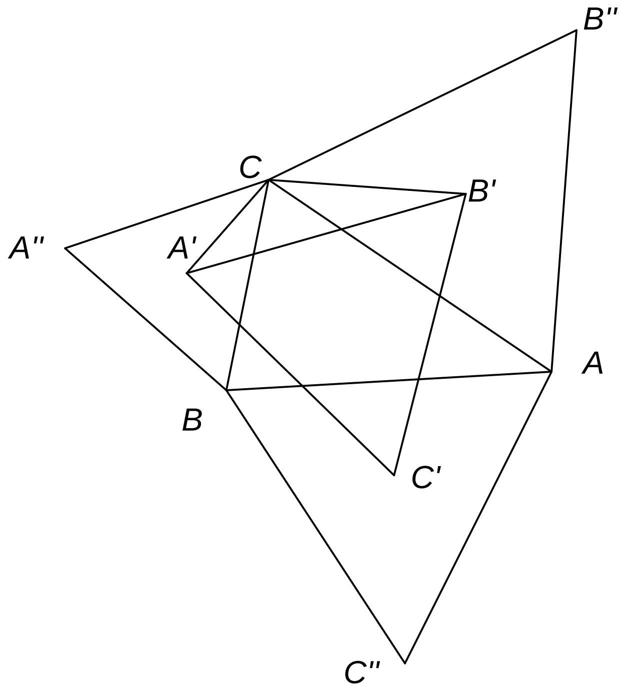


D'altra banda, la coincidència dels tres segments *AA*', *BB*' i *CC*' en el punt de Fermat *F* no resulta tan senzilla de provar: *F* pertany a les circumferències circumscrites als triangles *CBA*', *ABC*' i *CAB*', ja que des de *F* es veuen els segments *CB*, *AB* i *CA* sota angles de 120º en tots els casos (tots els angles que hi ha en *F* són de 60º). Així, *F* pertany als tres eixos radicals d'aquestes circumferències i és el seu punt d'intersecció.

Enunciat 12 (teorema de Napoleó)

Es diu que Napoleó Bonaparte, tot fent dibuixos sobre el terra, va descobrir un teorema. Va dibuixar un triangle i, sobre cada costat, un triangle equilàter. Després va unir el centre dels tres triangles equilàters. Segons ell sempre s'obté un nou triangle equilàter. Investigueu-ho.

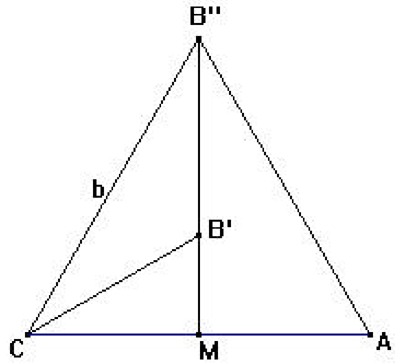
El teorema de Napoleó no té una demostració elemental. Es pot fer una demostració trigonomètrica fent ús del teorema del cosinus tot i que, com es veurà, resulta una mica embolicada. Aquest és el dibuix de la situació:



Considerem el triangle *A'B'C* i hi apliquem el teorema del cosinus per tal de calcular la longitud del segment *A'B'*. Cal tenir en compte que l'angle en el vèrtex *C* d'aquest triangle és, per construcció, $\widehat{C}+60^0$, on $\widehat{C}$ és l'angle en *C* del triangle original *ABC*:

$$(A'B')^2 = (CA')^2 + (CB')^2 - 2CA' \cdot CB' \cdot \cos(\widehat{C}+60^0) \quad \text{(relació 1)}$$

D'altra banda, en el triangle equilàter *CAB''* és fàcil calcular *CB'* en funció de b aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle *CMB'* (*a* = *BC*, *b* = *AC* i *c* = *AB* són els costats del triangle inicial).



S'obté així: $CB' = b\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Anàlogament, es pot obtenir *CA'* en funció d'*a* treballant amb el triangle equilàter *CBA''*:

$$CA' = a\frac{\sqrt{3}}{3}$$

A continuació se substitueixen els dos càlculs a la relació 1 i es desenvolupa el cosinus de la suma que hi apareix:

$$(A'B')^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\left(\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)\cdot(\cos\widehat{C}\cos 60^0 - \sin\widehat{C}\sin 60^0) =$$

$$= \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{2}{3}ab\cdot(\cos\widehat{C}\cdot\frac{1}{2} - \sin\widehat{C}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{ab\cos\widehat{C}}{3} + \frac{ab\sin\widehat{C}\cdot\sqrt{3}}{3}) \quad (2)$$

Finalment s'aplica el teorema del cosinus al triangle original *ABC* per tal d'aïllar $ab\cos\widehat{C}$ i es té en compte que l'àrea *S* del triangle *ABC* és $\frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C} \Leftrightarrow ab\cos\widehat{C} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

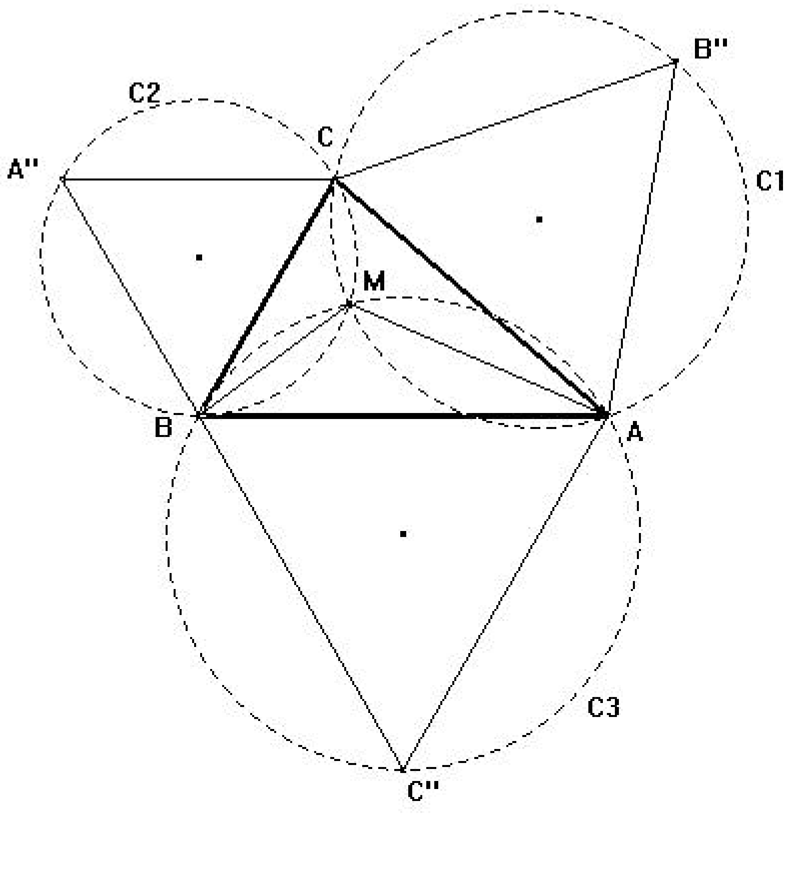
$$ab\sin\widehat{C} = 2S$$

Substituint a 2 s'obté:

$$(A'B')^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{a^2+b^2-c^2}{6} + \frac{2S\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2+b^2+c^2}{6} + \frac{2S\sqrt{3}}{3}$$

Com que aquesta expressió és simètrica en *a*, *b* i *c*, es pot concloure que *A'B'* = *B'C'* = *C'A'*.

També és possible fer una demostració sense emprar arguments de trigonometria. En primer lloc es prova que les circumferències circumscrites als triangles equilàters es tallen en un punt (de fet es tracta del punt de Fermat del problema anterior).



Sigui *M* el punt d'intersecció de les circumferències *C*1 i *C*2 (a banda d'*A*). Només cal provar que *C*3 passa també per *M*. Efectivament es té:

$\widehat{AMC} = \widehat{CMB} = 120^0$ (ja que es tracta d'angles inscrits que abasten arcs de 240º)

Per tant, es tindrà també:

$\widehat{BMA} = 120^0$

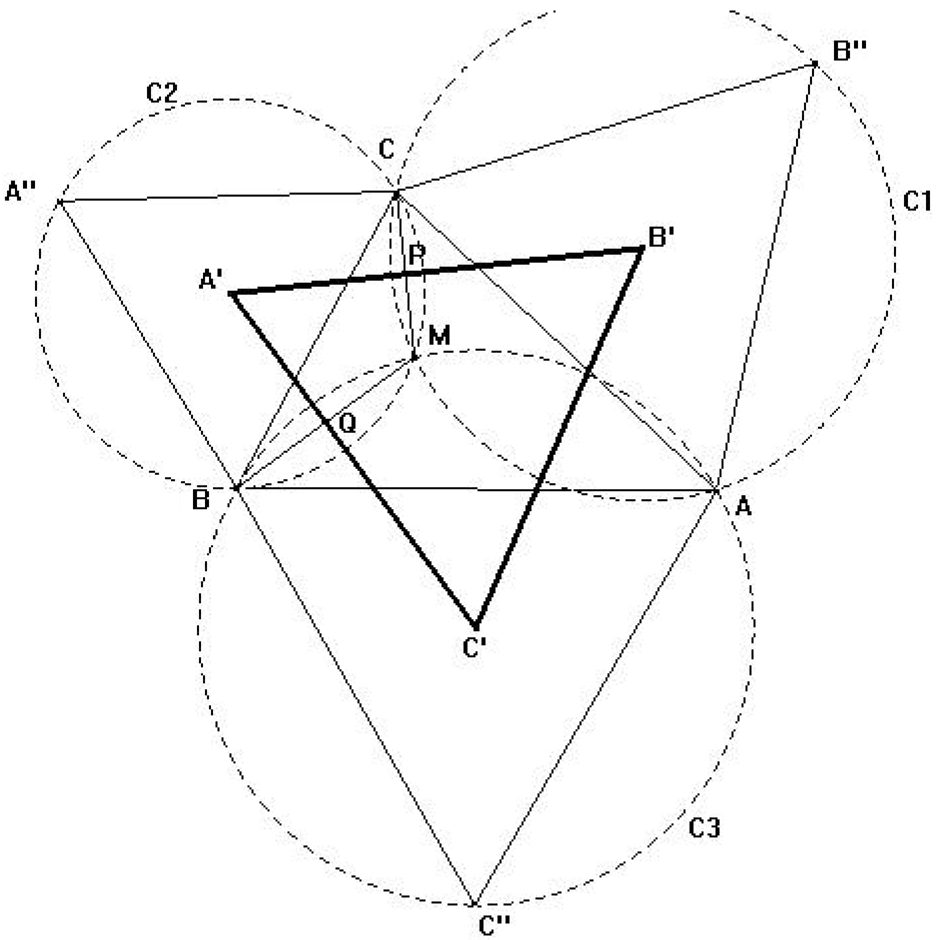
Aleshores, com que $\widehat{AC''B} = 60^0$, el quadrilàter *MAC''B* és inscriptible i *C*3 també ha de passar per *M*.

Ara ja es pot provar el teorema. Només cal demostrar que els tres angles del triangle *A'B'C'* són de 60º. Per a l'angle en *A'*, per exemple, es considera el quadrilàter *A'PMQ* i es té:

$\widehat{A'PM} = \widehat{A'QM} = 90^0$ (ja que el segment que uneix els centres de les circumferències *C*1 i *C*2 és perpendicular a l'eix radical i també passa el mateix amb *C*2 i *C*3)

$\widehat{PMQ} = \widehat{CMB} = 120^0$ (angle inscrit que abasta un arc de 240º)

$\widehat{A'} = \widehat{PA'Q} = 360^0 - 120^0 - 90^0 - 90^0 = 60^0$



En definitiva s'ha provat que el triangle *A'B'C'* és equilàter.

Enunciat 13 (un problema de geometria analítica)

Resoleu i comenteu la versió geomètrica del problema següent amb l'ajut del programa Cabri. Per a quins valors d'*a* el sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ (x-a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

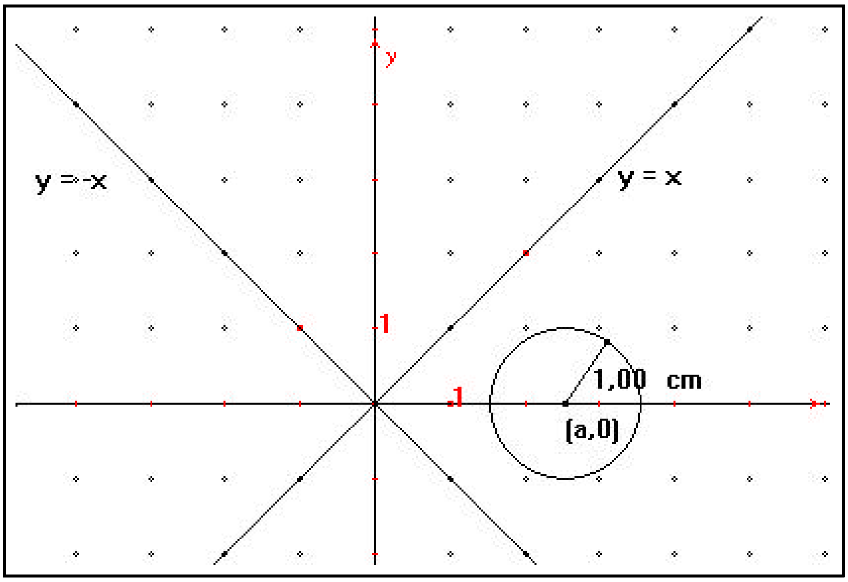
té 0, 1, 2, 3, 4, 5 solucions reals diferents?

La versió geomètrica del problema és més entenedora que la versió algèbrica: es tracta d'estudiar les interseccions del parell de rectes $(x+y)\cdot(x-y) = 0$ amb la circumferència de centre $(a,0)$ i radi 1.

Des del punt de vista dels continguts és un problema que poden fer els alumnes de batxillerat de ciències, tanmateix, el cert és que els resulta força complicat.

L'ús del programa Cabri II pot ajudar molt a visualitzar la resolució. Les figures següents il·lustren les possibles posicions relatives de la circumferència i del parell de rectes.

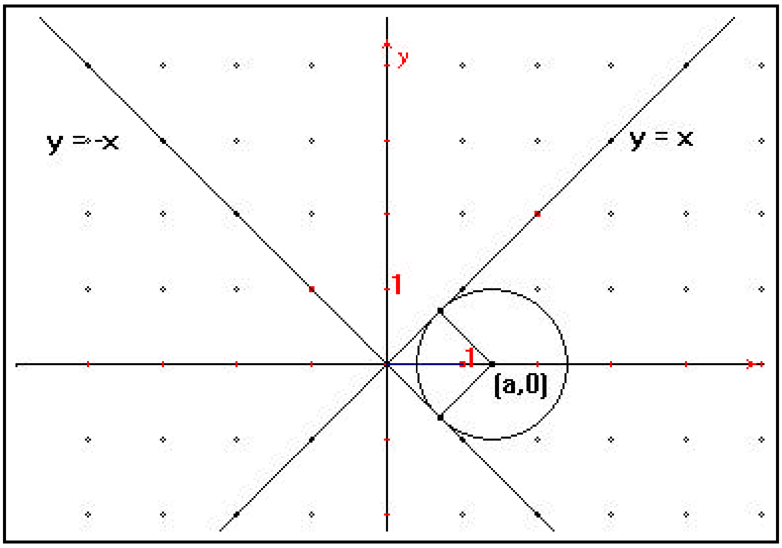
Situació 1: la circumferència no talla les rectes.



El sistema té zero solucions si, i només si:

$$d((a,0)\text{ , recta } x\text{-}y = 0) = \left|\frac{a}{\sqrt{2}}\right| > 1 \Leftrightarrow (a > \sqrt{2} \text{ o } a < -\sqrt{2})$$

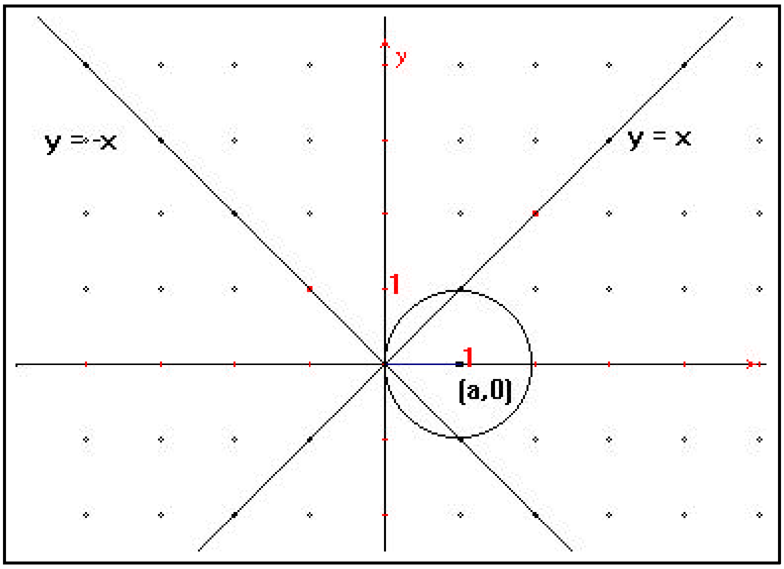
Situació 2: la circumferència és tangent a les rectes.



El sistema té dues solucions si, i només si:

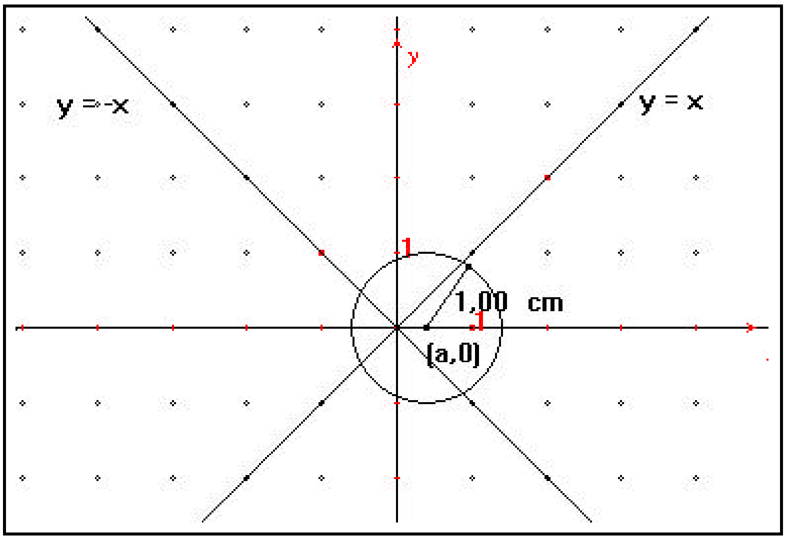
$$d((a,0)\ ,\ \text{recta}\ x\text{-}y = 0) = \left|\frac{a}{\sqrt{2}}\right| = 1 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}$$

Situació 3: la circumferència passa per l'origen de coordenades.



El sistema té tres solucions si, i només si, la circumferència $(x\text{-}a)^2 + y^2 = 1$ passa per l'origen de coordenades $\Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow$ a=±1

Situació 4: la circumferència talla el parell de rectes en quatre punts.



El sistema té quatre solucions si, i només si:

d((*a*,0), recta *x*-*y* = 0) = $\left|\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right|$ < 1 i la circumferència no passa per (0,0)
$\Leftrightarrow(-\sqrt{2} < a < \sqrt{2})$ i $a \neq \pm 1$

El sistema no té cinc o més solucions en cap cas.

A3.7. RESOLUCIONS DELS EXERCICIS I DELS PROBLEMES DE L'ANNEX 1

---

1. Traceu, fent ús del programa Cabri-Géomètre:

i) La recta tangent a una circumferència per un punt de la circumferència.

ii) Les rectes tangents a una circumferència per un punt exterior.

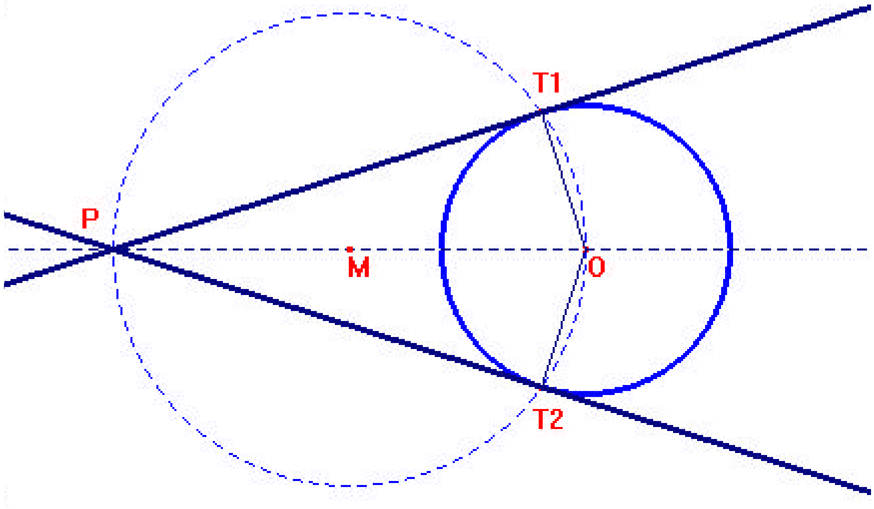
iii) Les rectes tangents comunes a dues circumferències.

El primer apartat és molt senzill: es traça la perpendicular al radi en el punt de tangència.

Pel que fa al segon apartat, es té:

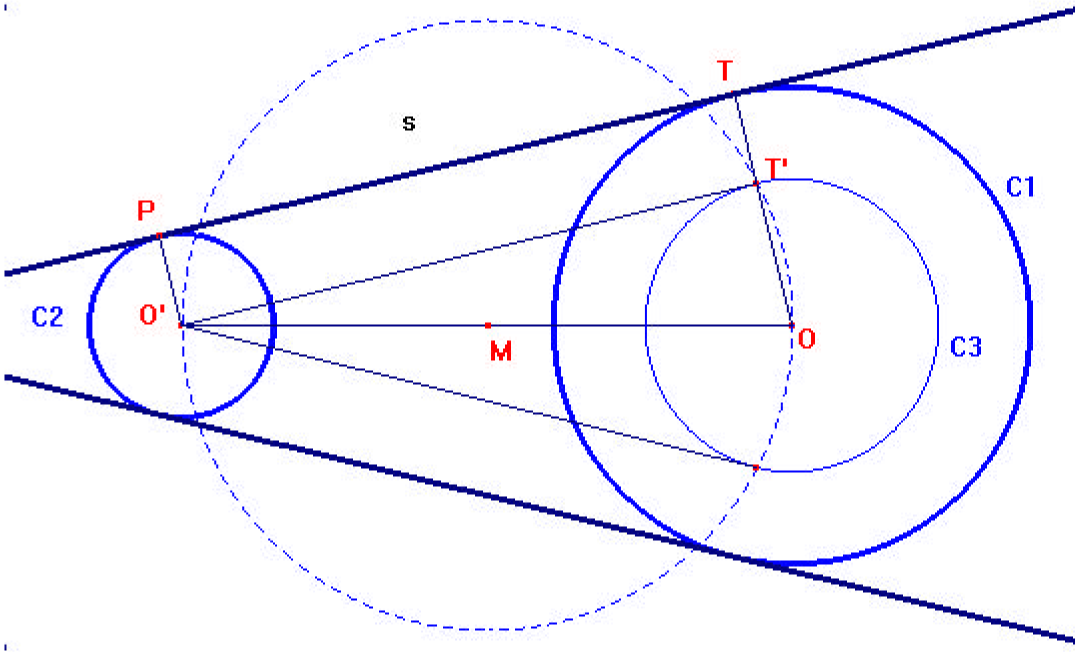
1. Es troba el punt mitjà *M* del segment que uneix el punt exterior *P* amb el centre de la circumferència *O* i es traça la circumferència de centre *M* i radi *MP*.

2. La intersecció d'aquesta circumferència amb la circumferència donada proporciona els punts de tangència *T*1 i *T*2.



Finalment, es resol el tercer apartat:

a) Tangents exteriors



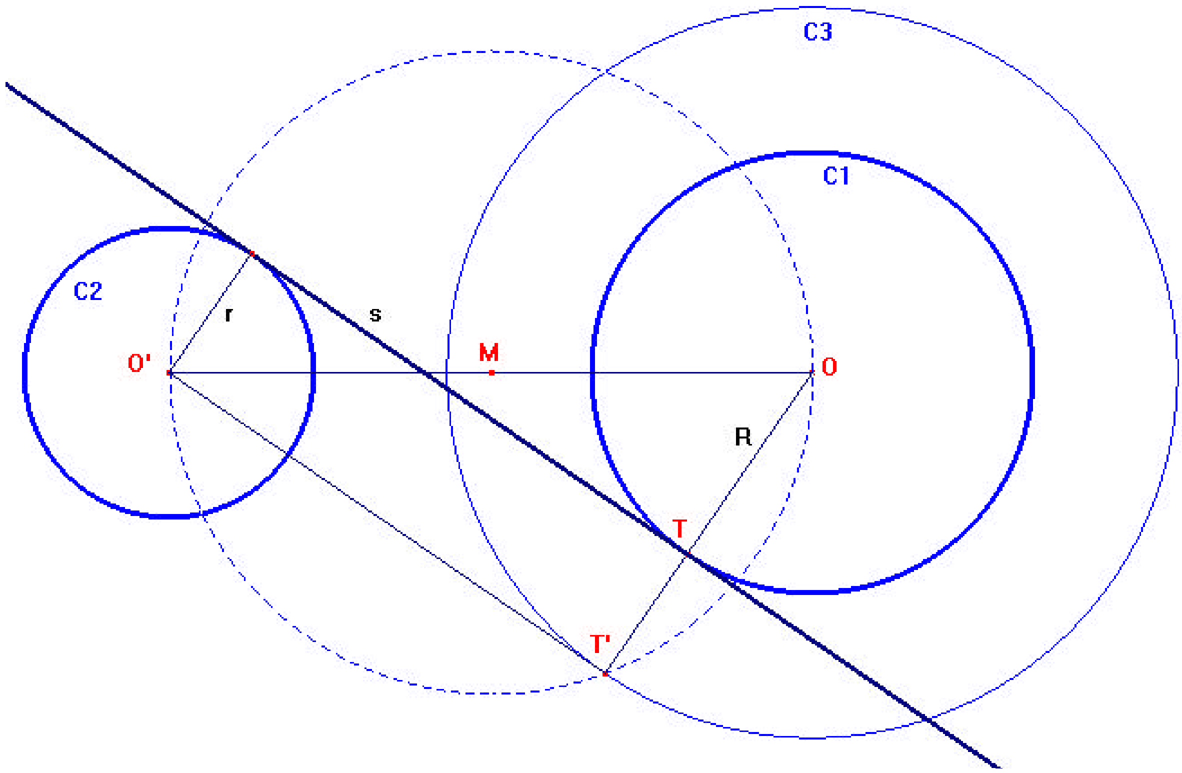
1. Es construeix la circumferència *C*3 de radi *R*-*r* i centre *O* (*R* i *r* són els radis respectius de *C*1 i *C*2). Això es pot fer, per exemple, amb la instrucció *compàs* del programa.

2. Es tracen les rectes tangents a la circumferència *C*3 des del punt *O*'.

3. Es traça la recta que suporta el radi *OT*' i es troba el punt de tangència *T*.

4. Es traça la recta tangent *s* que és la paral·lela a *O'T'* per *T*.

b) Tangents interiors



1. Es construeix la circumferència $C3$ de radi $R+r$ i centre O (R i r són els radis respectius de $C1$ i $C2$). Això es pot fer, per exemple, amb la instrucció *compàs* del programa.

2. Es traça la recta tangent a la circumferència $C3$ des del punt O'.

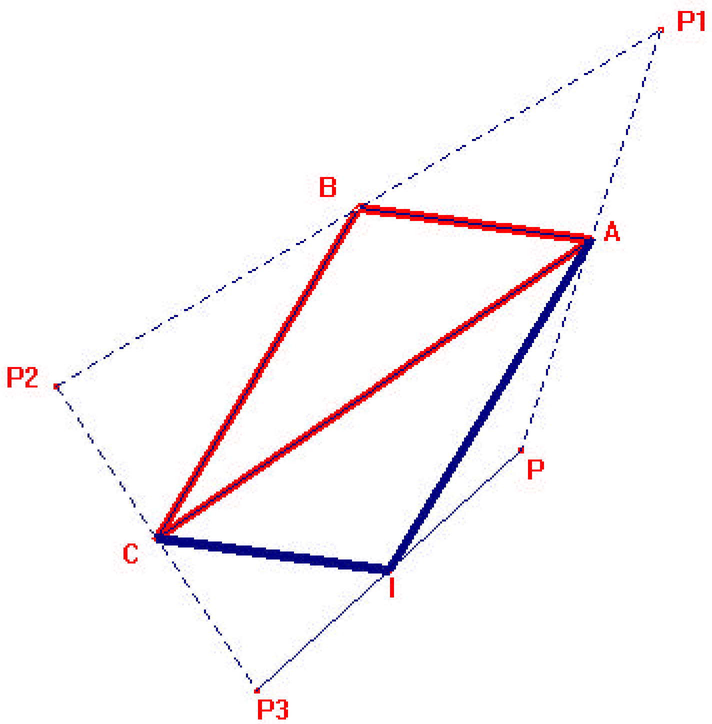
3. Es traça el radi OT' i es troba el punt de tangència T.

4. Es traça la recta tangent s que és la paral·lela a $O'T'$ per T.

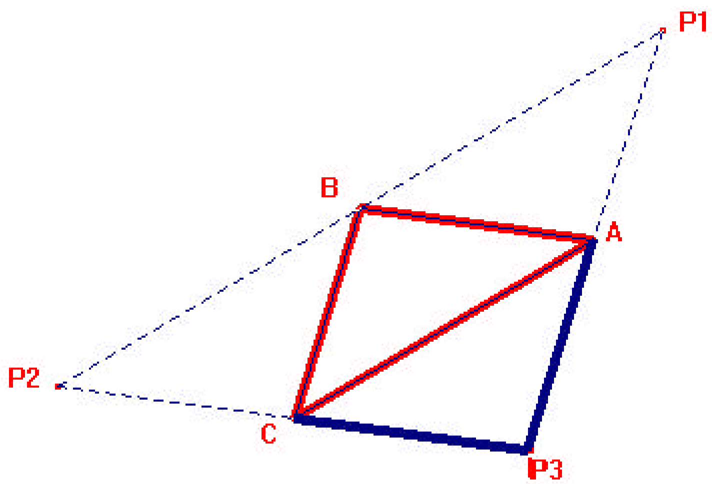
---

2. Construïu un triangle ABC i considereu un punt qualsevol del pla P. Siguin P_1 el simètric de P respecte del punt A, P_2 el simètric de P_1 respecte del punt B i P_3 el simètric de P_2 respecte del punt C. Moveu el punt P. Què es pot dir de la figura quan P_3 i P coincideixen? Construïu el punt mitjà I del segment PP_3. Què es pot dir d'aquest punt quan P_3 es mou? Doneu una explicació raonada (aquest exercici està extret de CAPPONI, B. i LABORDE, C. *Cabri-Classe*. Argenteuil: Editions Archimède, 1995).

Amb el programa Cabri es pot fer un estudi experimental del problema. No és difícil constatar que el punt I roman invariable en moure P i que aquest punt I forma un paral·lelogram amb A, B i C.

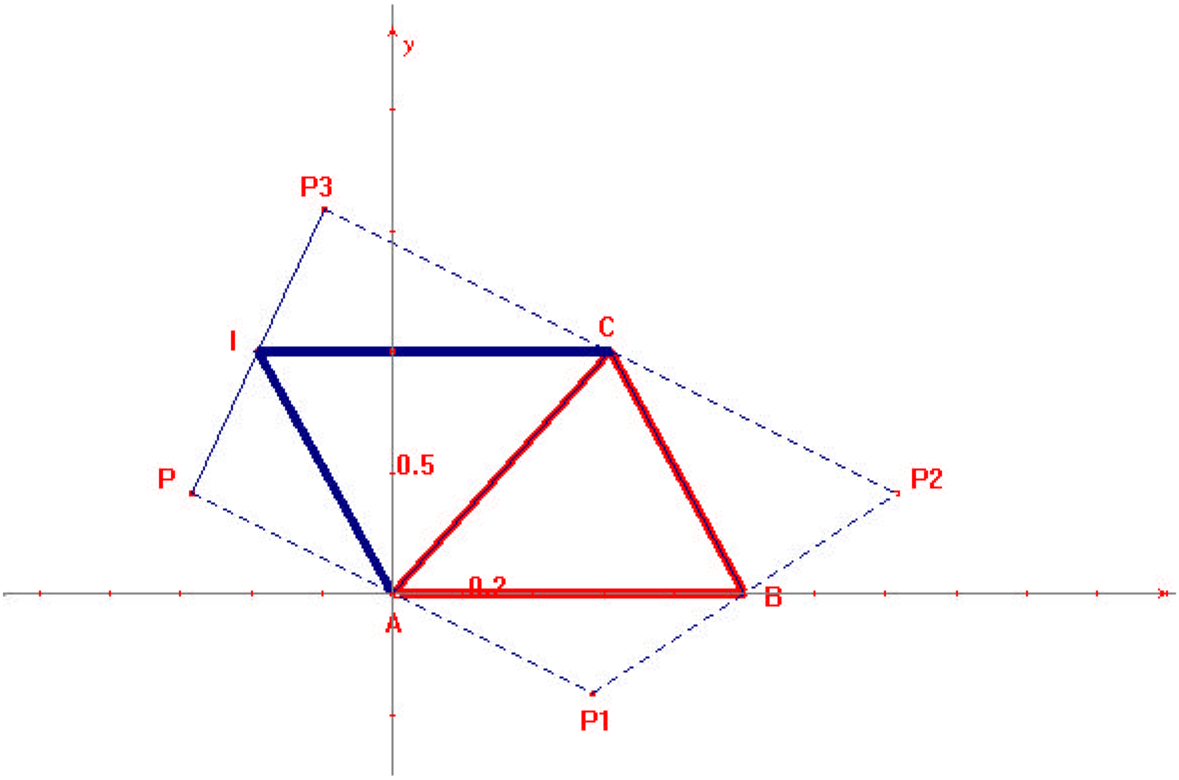


Si amb el punter es mou el punt P o els vèrtexs del triangle per aconseguir que P i P_3 coincideixin, també és fàcil constatar que en aquest cas P forma un paral·lelogram amb A, B i C.



Una altra cosa és demostrar aquestes conjectures. Probablement això queda fora de l'abast de la majoria de l'alumnat de secundària.

Es pot obtenir una demostració relativament simple d'aquests resultats amb instruments de geometria analítica. Es posa l'eix OX d'abscisses sobre el costat AB de tal manera que $A=(0,0)$ i $B=(1,0)$ (amb Cabri es pot emprar la instrucció *nous eixos* per tal d'aconseguir-ho). Aleshores es té:



A = (0,0); B = (1,0); $C = (c_1, c_2)$ i $P = (x,y)$. Es poden calcular les coordenades de tots els altres punts sense dificultat:

$P_1 = (-x,-y)$

$P_2 = B + \overrightarrow{P_1B} = (1,0) + \overrightarrow{(1+x, y)} = (2+x,y)$

$P_3 = C + \overrightarrow{P_2C} = (c_1, c_2) + \overrightarrow{(c_1 - 2 - x, c_2 - y)} = (2c_1 -2-x,\ 2c_2 -y)$

$$I = \left(\frac{x + 2c_1 - 2 - x}{2}, \frac{y + 2c_2 - y}{2}\right) = (c_1 - 1, c_2)$$

Ara només cal comprovar que es té: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{(c_1 - 1, c_2)}$ i $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{(1,0)}$. Això prova que I forma sempre un paral·lelogram juntament amb A, B i C.

D'altra banda si $P = P_3$, es tindrà:

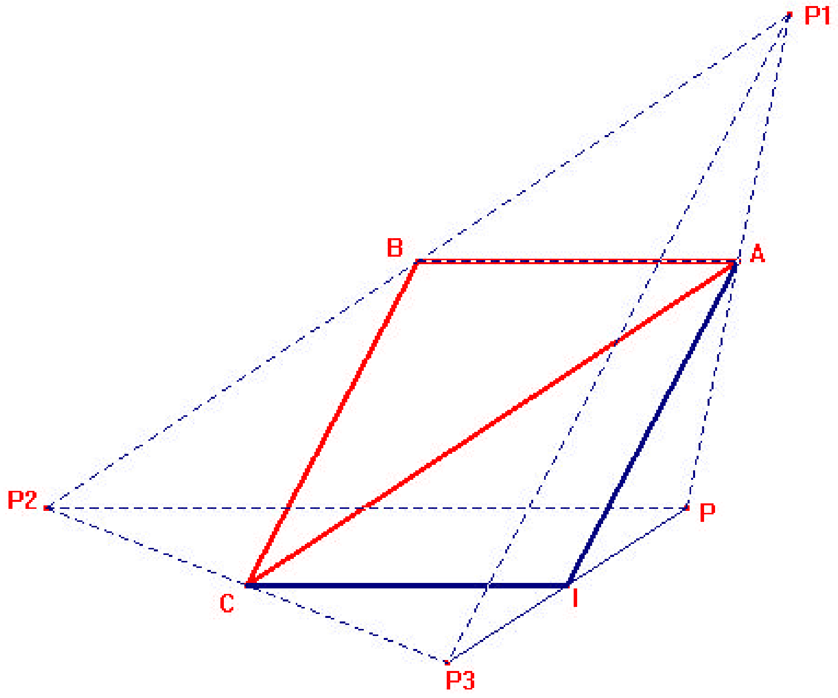
$x = 2c_1 -2-x$ i $y = 2c_2 -y$

Amb la qual cosa es conclou $P = (c_1 -1, c_2) = I$.

La demostració amb arguments de geometria sintètica és més elegant, tot i que que no resulta massa intuïtiva. La clau de la resolució passa per traçar les diagonals del quadrilàter *PP1P2P3* i "veure" un seguit de triangles semblants.

Per demostrar que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IC}$ es consideren els triangles *ABP1* i *PP2P1* (en ser *A* i *B* els punts mitjans dels segments *PP1* i *P2P1*, respectivament, es tracta de triangles semblants amb raó de semblança 2). Es té, doncs: $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PP2}$ i $2\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{PP2}$; per tant, es conclou que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IC}$.

Anàlogament es demostra que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BC}$ a partir de la semblança dels triangles *BCP2* i *P1P3P2*, d'una banda, i *AIP* i *P1P3P*, de l'altra.



La demostració es pot relacionar també amb l'anomenat teorema de Varignon (que apareix com a problema al capítol *3* i que està solucionat a *A3.3*). Efectivament, es pot considerar el quadrilàter $PP_1P_2P_3$ els punts mitjans dels costats del qual són precisament *A*, *B*, *C* i *I* (la primera figura que acompanya aquesta resolució il·lustra la situació). El teorema assegura que *ABCI* és un paral·lelogram i demostra, doncs, les conjectures formulades.

---

3. Construïu una rosassa anàloga a la presentada a l'exemple 3 de l'apartat A.1.5.2 a partir de l'estrella de sis puntes.

Aquesta construcció no presenta grans dificultats. Es poden seguir els passos següents:

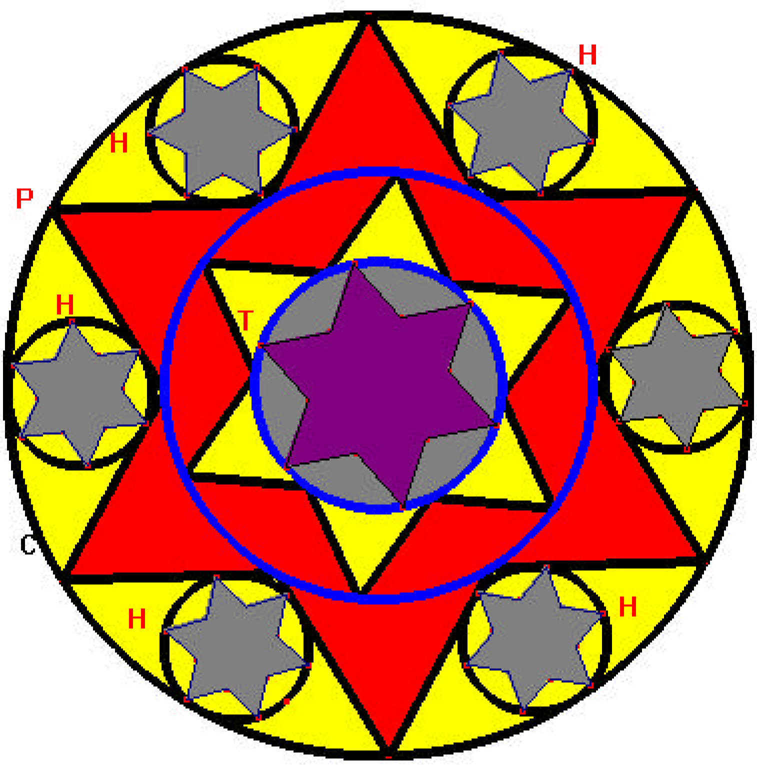
1. Es parteix d'una circumferència *C* i s'hi pren un punt a sobre *P*. Es traça l'hexàgon regular inscrit i l'estrella de sis puntes. A continuació convé redefinir-la amb la instrucció polígon.

2. Es defineix una macro que, donada una circumferència i un punt sobre ella, traci l'estrella de sis puntes inscrita: els objectes inicials són la circumferència i el punt, i l'objecte final és l'estrella de sis puntes inscrita.

3. Després es traça la circumferència inscrita a l'estrella, s'hi pren un punt a sobre i s'aplica la macro. Es repeteix el procés.

4. Per traçar les estrelles petites cal trobar l'incentre dels triangles que defineixen els costats de l'estrella i les rectes tangents a la circumferència *C*, traçar la circumferència inscrita en aquests triangles i aplicar la macro novament.

5. Amb la instrucció *animació múltiple* del programa es poden posar molles al punts etiquetats i a la circumferència *C*. Quan es prem retorn s'observa l'animació.



---

4. Construïu el polígon regular inscrit de 15 costats a partir d'aquestes dues indicacions:

a) Trobeu dos nombres enters *A* i *B* tals que $\frac{A}{3}+\frac{B}{5}=\frac{1}{15}$

b) A partir dels mètodes que permeten inscriure el triangle equilàter i el pentàgon i de l'indicació anterior, deduïu un mètode per inscriure el polígon regular de 15 costats.

Si es multiplica l'equació $\frac{A}{3}+\frac{B}{5}=\frac{1}{15}$ per 15 s'obté l'equació diofàntica $5A + 3B = 1$, equivalent a l'equació $A = \frac{1-3B}{5}$. Interessa la solució $B = -3$ i $A = 2$:

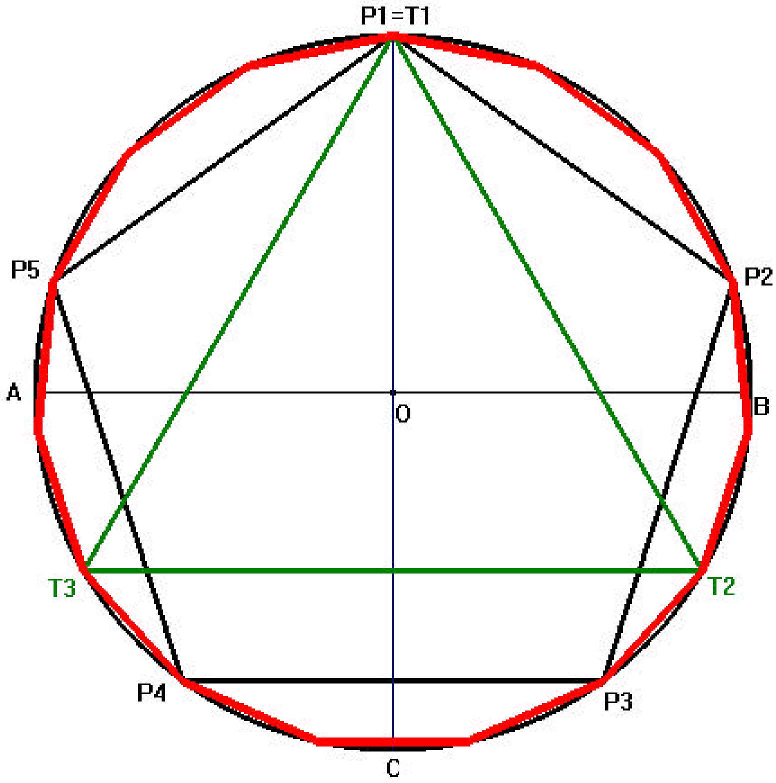
$\frac{2}{3}-\frac{3}{5}=\frac{1}{15} \Leftrightarrow$ per dividir la circumferència en 15 parts iguals es prenen dues de les divisions en tres parts iguals i es resten tres de les divisions en cinc parts iguals.

El dibuix és el següent:

INSCRIPCIÓ DEL 15-GON

(2/3)-(3/5)=(1/15)

El costat del 15-gon regular inscrit és el segment P4T3



APÈNDIX*. GEOMETRIA TALLANT I DOBLEGANT PAPER

En aquest apèndix es comença analitzant els diferents formats dels fulls de paper des del punt de vista geomètric; tot seguit s'aborda el problema de dividir un full de paper en un nombre qualsevol de rectangles iguals i, per acabar, s'explica la manera de construir alguns polígons regulars doblegant i tallant un full.

1. EL FORMAT DIN

S'anomena format d'un full el quocient entre la seva llargària i la seva amplària. El format determina la "forma" del paper. Si aquest format és 1, el full de paper és un quadrat i com més lluny està d'aquest valor més "allargat" resulta.

Al llarg de la història i en els diferents països s'ha fet ús de formats molt diversos (sempre més petits que 2). En l'actualitat, però, s'ha generalitzat a tot el món (llevat dels Estats Units) l'anomenat format DIN i més concretament el format **DIN A**.

La conveniència d'adoptar un format únic prové del fet que, abans d'universalitzar-se el format DIN, cada país tenia un munt de formats. A Alemanya, per exemple, n'hi havia 31, a Bèlgica 18, a França 16, a Holanda 21, a Anglaterra 26 i a Espanya 6.

Les dimensions dels fulls que s'utilitzen per escriure (DIN A4) són 297 $\times$ 210 mm i, per tant, el format DIN resulta ser $\frac{297}{210}$ ~1,4142, que és aproximadament $\sqrt{2}$. L'elecció d'aquest format no és, com tot seguit es veurà, casual ni gratuït. Aquestes són les dimensions del fulls DIN A:

DIN	**mm**
A0	1189x841
A1	841x594
A2	594x420
A3	420x297
A4	297x210
A5	210x148
A6	148x105
A7	105x74
A8	74x52
A9	52x37

Si s'observa la taula anterior es veu que cada DIN es pot obtenir en tallar l'anterior just per la meitat de la seva llargària. No cal pensar gaire per notar l'estalvi que això representa en maquinària: només s'ha de fabricar un tipus de paper (el DIN A0); el altres s'obtenen dividint l'anterior per la meitat (Fig. 1 i 2).

(*) L'autor d'aquest apèndix és **Antoni Cuenca Sàez**

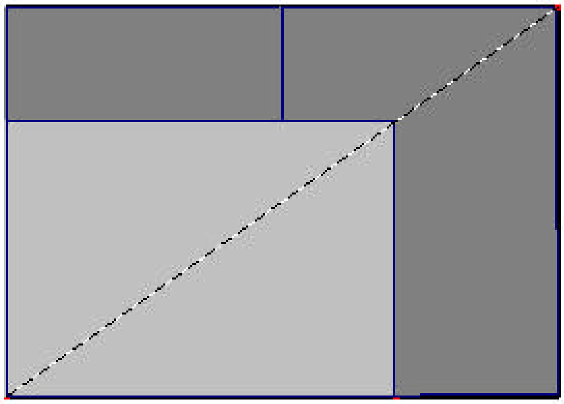


Fig. 1

La meitat d'un DIN conserva el format de l'original

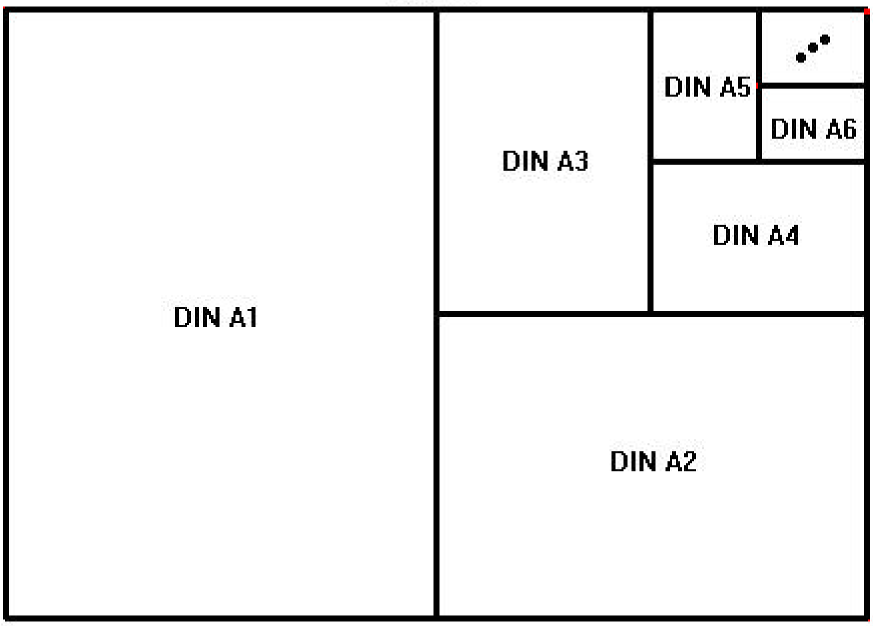


Fig. 2

Les dimensions del DIN A0 s'han triat de manera que la seva superfície sigui aproximadament 1 m^2. La norma DIN B conserva els formats DIN amb l'única diferència que es parteix d'un full (DIN B0) que té el costat petit d'1 m de longitud (i per tant el gran d'1,414 m), en lloc de partir d'un full d'1 m^2.

A continuació, es prova que **el format DIN és l'únic que compleix la propietat de "clonar-se" quan es parteix per la meitat** (vegeu la Fig. 3).

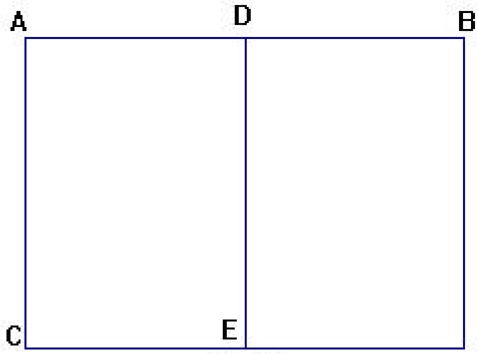


Fig. 3

Al rectangle de la figura se suposa que $AC=1$ i que AD és la meitat de AB. Sigui x la longitud de AB (x serà doncs el format del full, perquè $\frac{AB}{AC} = \frac{x}{1} = x$). Si el rectangle petit conserva el format del gran, llavors s'ha de tenir:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \text{ és a dir } \frac{x}{1} = \frac{1}{x/2} \text{ que implica } x^2 = 2 \text{ i, per tant, } x = \sqrt{2}\,.$$

Hi ha una altra manera de clonar els DIN (vegeu la Fig. 4).

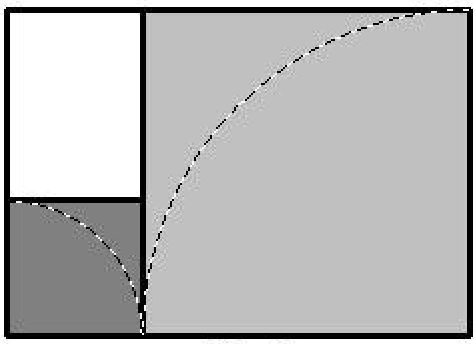


Fig. 4

El rectangle gran de la Fig. 4 és un DIN. S'ha de començar per suprimir el quadrat més gran que conté (en gris clar). Eliminem després, del rectangle que ha quedat, una altra vegada el quadrat més gran (en gris fosc); el rectangle que resta (en blanc) té format DIN. Més tard es prova per què, però, **podríeu demostrar-ho ara?**

Hi ha una manera d'obtenir dos clons diferents d'un full de paper rectangular de <u>format qualsevol</u> tallant-lo i tornant-lo a enganxar. Mireu les figures següents:

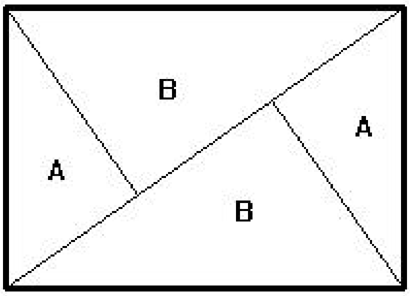


Fig. 5a

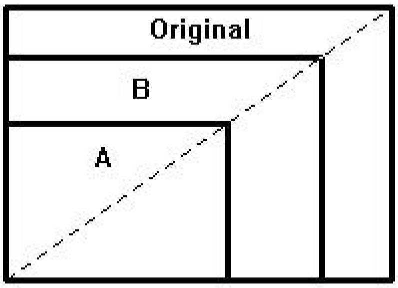


Fig. 5b

Es talla el rectangle per la diagonal i, després, cada triangle rectangle resultant per l'altura corresponent a la hipotenusa (Fig. 5a). Si s'enganxen les parelles de triangles iguals per la hipotenusa, s'obtenen dos rectangles diferents però del mateix format que l'original (Fig. 5b). És un senzill exercici veure que això és cert. **Podríeu provar-ho?** (Nota: tots els triangles que hi intervenen són semblants).

Si s'itera la construcció anterior, s'obté una elegant pavimentació del pla amb tres grandàries de rectangles del mateix format (Fig. 6).

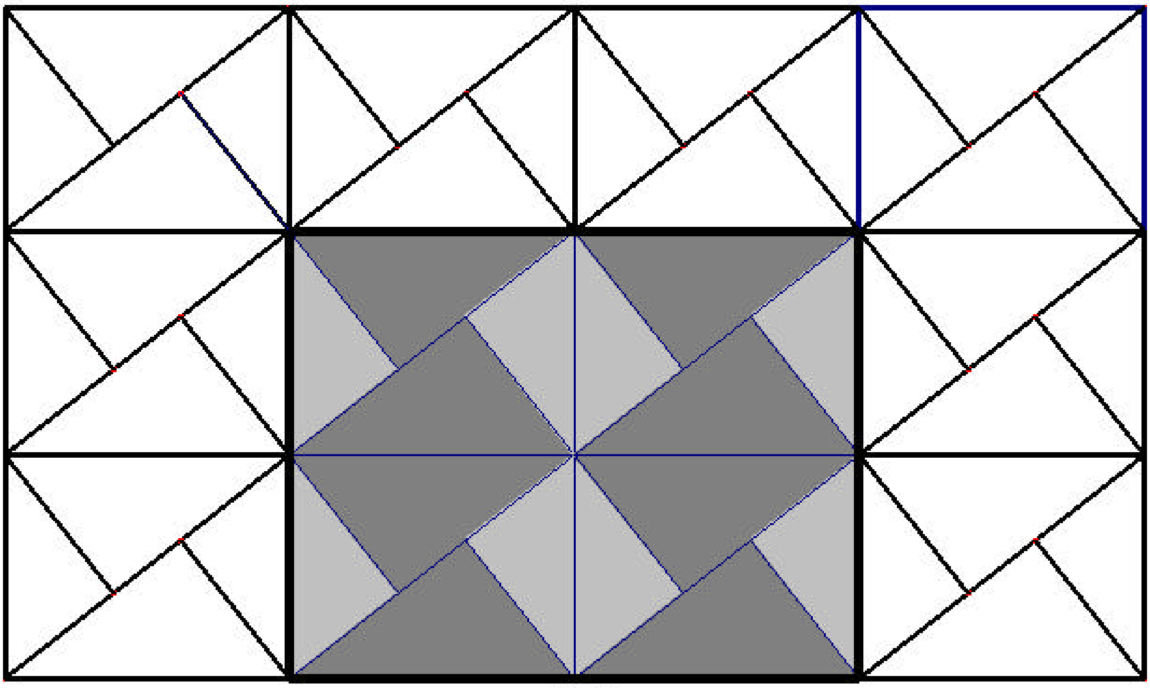


Fig. 6

2. EL FORMAT AURI

Hi ha un altre format de paper que, tot i que no és usual com a paper d'escriure, és freqüent en material gràfic divers: es tracta del **format auri**.

S'anomena nombre auri (o nombre d'or o divina proporció o...) el nombre $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \sim 1,618$ i (és clar!) es diu que un full té format auri si té aquest nombre com a format. Aquest és el seu aspecte (Fig. 7).

Fig. 7

L'ús del format auri no està motivat per causes d'ordre pràctic com el DIN, sinó per raons estrictament estètiques. El nombre ϕ ha estat emprat a l'art des de l'antiguitat clàssica i es presenta molt sovint a la natura. S'han fet enquestes que semblen provar que és el format rectangular més plaent a la vista.

Com ja s'ha dit, és rarament utilitzat com a format de paper d'escriure; el seu ús, però, està bastant estès en material ja imprès: targetes de visita i de crèdit, targetes postals, segells... Els cassets d'àudio també tenen aquest format i el DNI, paradoxalment, no té format DIN sinó format auri.

Alguns llibres (pocs) s'editen en aquest format (generalment en edicions de luxe). Nogensmenys, freqüentment, s'adopta aquest format per a la "taca" o cos (la part de la pàgina ocupada pel text).
Així és com es construeix **un FFA (full amb format auri) a partir d'un quadrat de paper** (Fig. 8).

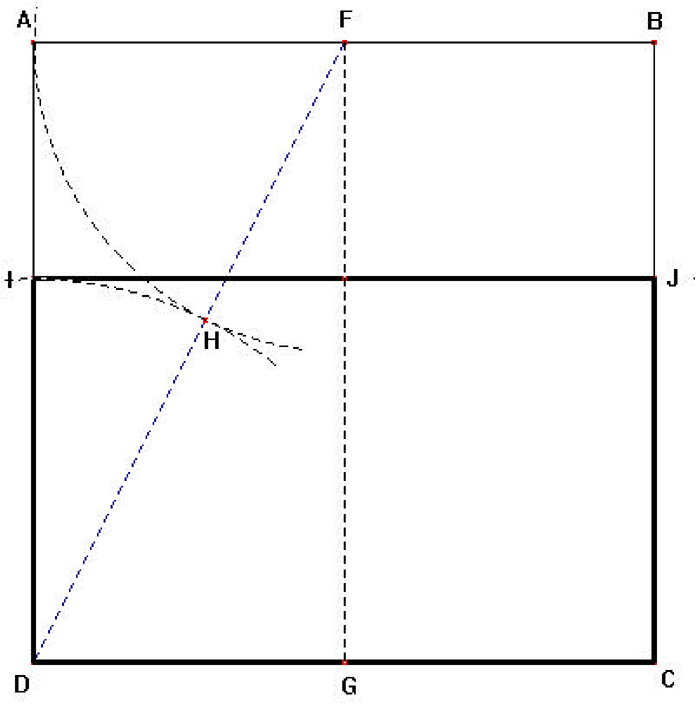


Fig. 8

Es comença amb el quadrat *ABCD* i es parteix per la meitat segons *FG*. Es doblega per *FD* i es porta *A* sobre *FD* per obtenir *H*. Ara es porta *H* sobre *AD* per obtenir *I*. El rectangle *IJCD* és auri.

En efecte: si es fa $AB = 1$ llavors $AD = \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ i, per tant, $DH = ID = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. La raó entre els costats del rectangle *IJCD* és, doncs, $\frac{IJ}{ID} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Abans s'ha explicat com obtenir un "clon" d'un DIN en suprimir dos quadrats i s'ha dit que més tard s'explicaria per què funcionava. De fet, a continuació, es veu bastant més: **els formats DIN i auri es clonen per supressió de dos quadrats i, de fet, són els <u>únics</u> formats que es poden clonar així.**

Observeu la figura 9:

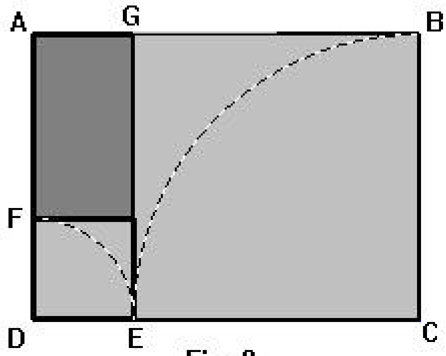


Fig. 9

Sigui $AB = a$ i $AD = 1$. Llavors, $DE = DC–EC = a - 1 = AG$ i $AF = AD–FD = 1 - (a - 1) = 2 - a$. Ara, si se suposa que el rectangle *ABCD* té la propietat de clonar-se si s'eliminen dos quadrats, hi ha dues possibilitats:

a) $AF/AG = a$ o b) $AG/AF = a$. En el primer cas es tindrà $\frac{2-a}{a-1} = a \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$ i s'obté el DIN i en el segon cas es té $a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ i s'obté l'FFA.

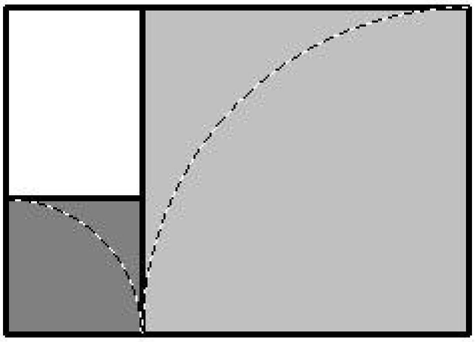
En el cas del DIN la relació entre els costats del rectangle original i el clon és

$$\frac{1}{a-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 = a+1$$

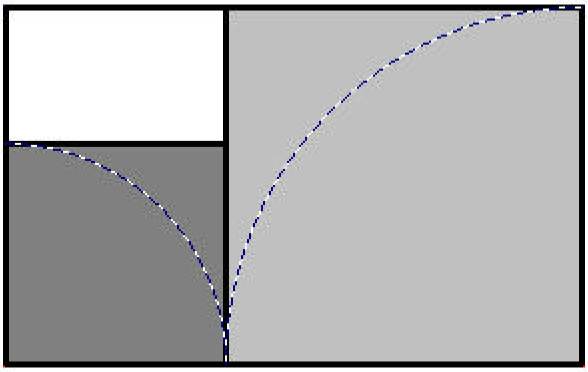
i en el cas de l'FFA és

$$\frac{1}{2-a} = \frac{1}{2-\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{\sqrt{5}+3}{2} = a+1$$

Procés d'eliminar dos quadrats



DIN



FFA

3. LA DIVISIÓ D'UN FULL EN RECTANGLES IGUALS

És trivial dividir un rectangle de paper de qualsevol format en dos rectangles iguals. Es pot preguntar: i en un nombre qualsevol de rectangles iguals? Bé, no és tan fàcil però es pot fer. Heus ací el procediment: **"Si, a la Fig. 10, el plec *a* divideix el full en *n* parts, llavors el plec *b* el divideix en *n+1* plecs iguals"**

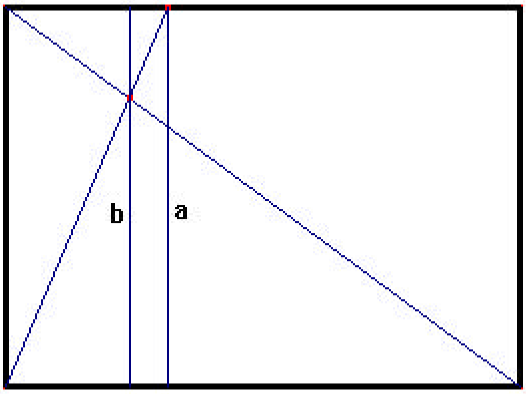
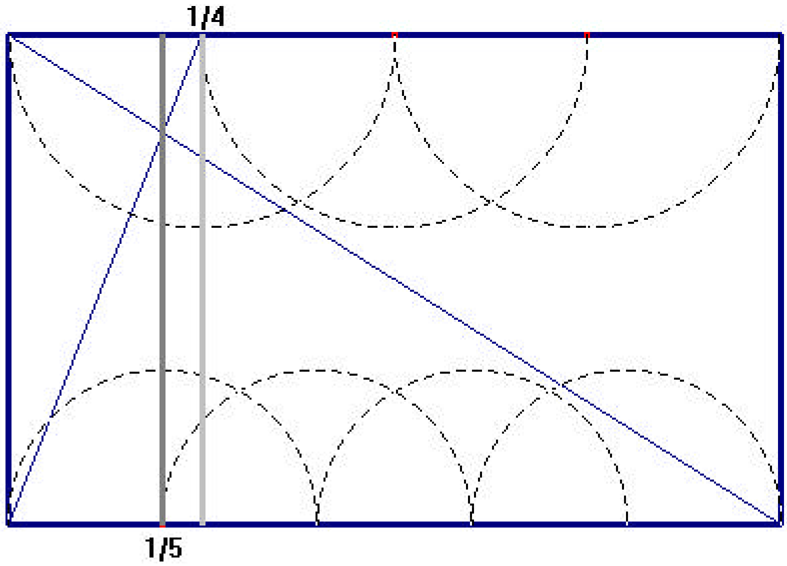


Fig. 10

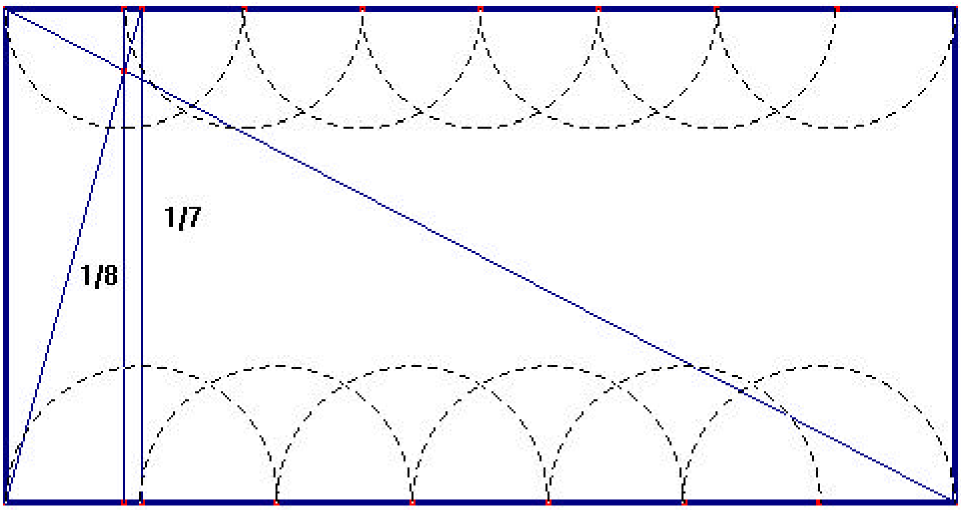
Aquest fet permet passar de n divisions a n+1 i recíprocament (això és un procés de recurrència).

Abans de veure per què funciona aquest procediment es presenten dos exemples:

1) Pas de 4 rectangles a 5 rectangles



2) Pas de 8 rectangles a 7



A continuació s'explica per què funciona aquest procediment (Fig.11).

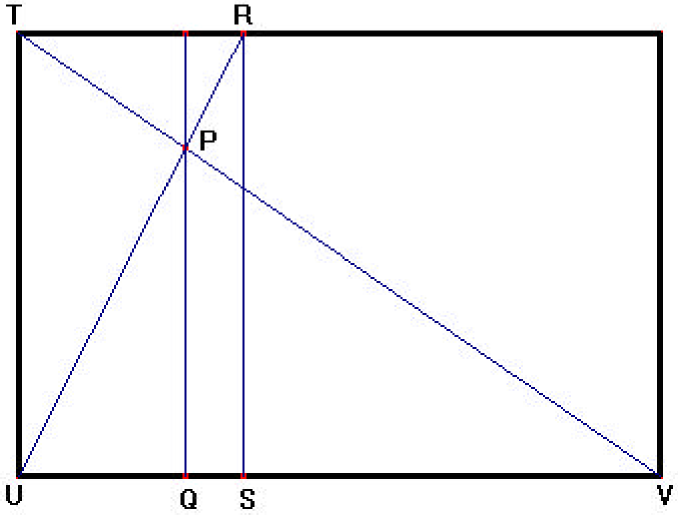


Fig. 11

Sigui TU = 1 i $UV = a$, com sempre. Si se suposa que $US = \frac{a}{n}$, es tracta de veure que $UQ = \frac{a}{n+1}$. Els triangles PQU i RSU són semblants i, per tant, $\frac{PQ}{1} = \frac{UQ}{\frac{a}{n}}$. També ho són els triangles TUV i PQV, per tant, $\frac{PQ}{1} = \frac{a - UQ}{a}$, igualant s'obté $n \cdot UQ = a - UQ$ i, per tant, $UQ = \frac{a}{n+1}$.

Hi ha un procediment alternatiu per **dividir un DIN en tres parts iguals** (Fig. 12).

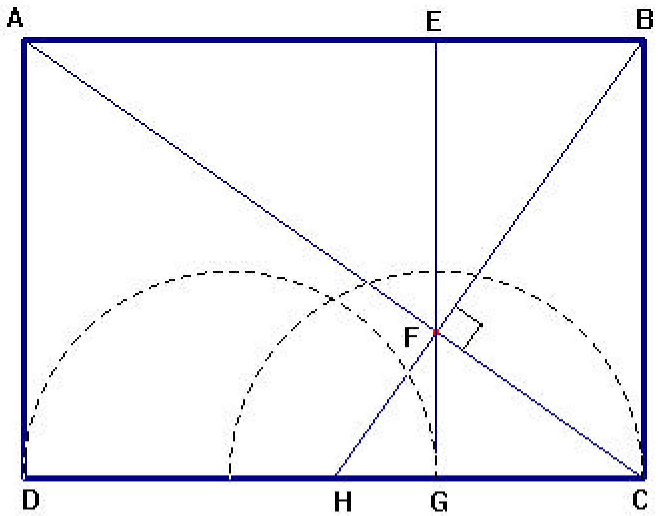


Fig. 12

El procediment és el següent: 1) Doblegar per la diagonal AC. 2) Doblegar pel vèrtex B de forma que el doblec sigui perpendicular a AC. 3) Doblegar per EG (perpendicular a DC) passant per F.
Ara es pot veure per què GC és un terç de DC:

Es té que $CD = \sqrt{2}$ i $AD = 1$ i, si s'aplica el teorema de Pitàgores, s'obté que $AC = \sqrt{3}$. Els triangles ADC i BFC són semblants i, per tant, $\frac{FC}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, és a dir, $FC = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Ara bé, els triangles FGC i ADC també són semblants la qual cosa implica que $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{FC}{GC}$, és a dir $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{GC}$, i finalment $GC = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Per dur a terme la construcció anterior s'ha de doblegar el full DIN per la diagonal. Es comprova que això és una mica difícil de fer. Hi ha una manera de fer aquest doblec "sense fer-lo", com tot seguit s'explica (es pot trobar la prova al final de l'apèndix).

El procediment consisteix a dividir la part llarga del full en quatre parts, doblegant-lo dos cops per la meitat i, després, fer coincidir la part superior del paper amb el punt que marca la divisió en quatre de la part inferior tal com s'indica a la figura 13. El full queda doblegat per la diagonal.

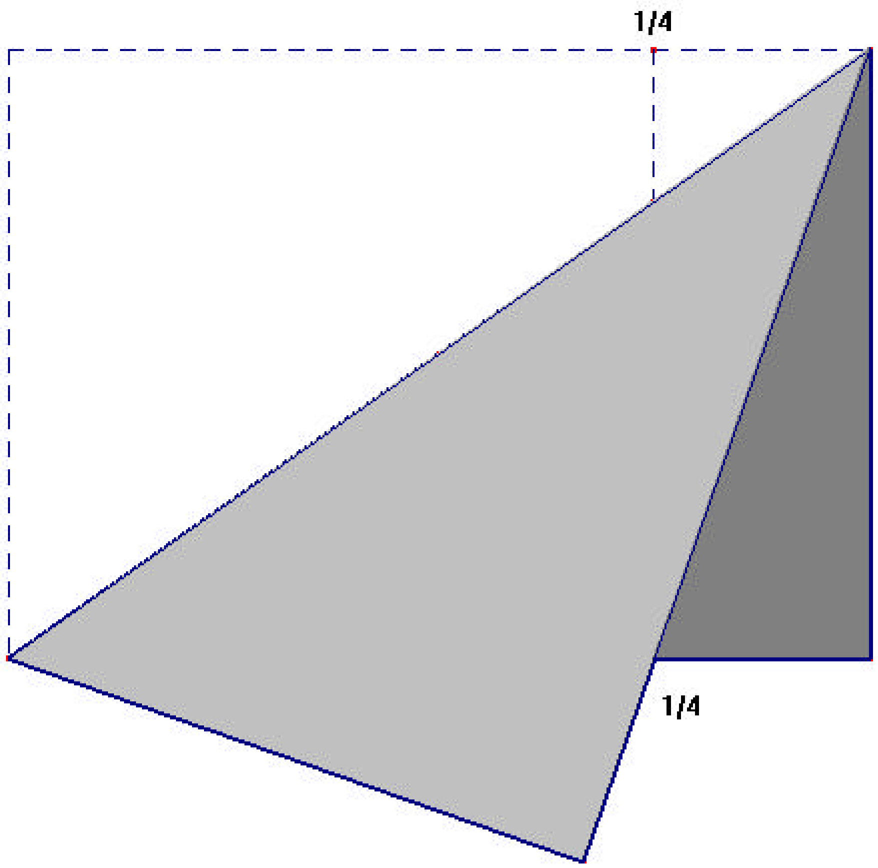
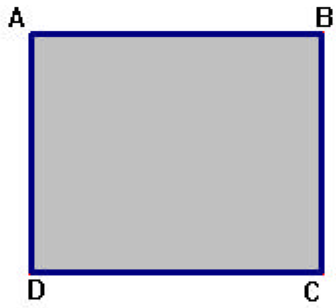
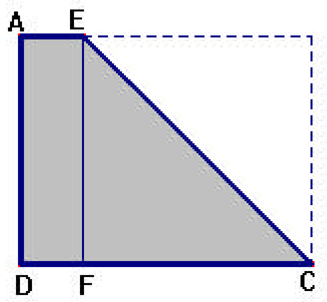


Fig. 13

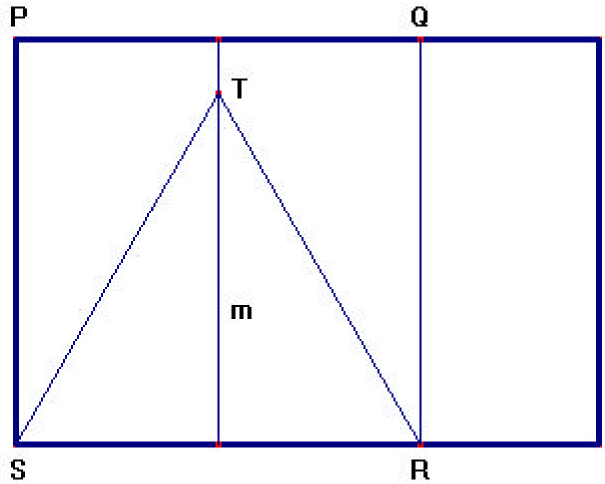
4. PAPIROFLÈXIA I POLÍGONS REGULARS

És ben senzill obtenir un **quadrat** a partir d'un full qualsevol de paper:





Si es porta el vèrtex *B* a la part inferior del paper, es doblega per *EC* i s'elimina el rectangle *AEFD*, s'obté un quadrat.
També és fàcil d'obtenir un **triangle equilàter:**

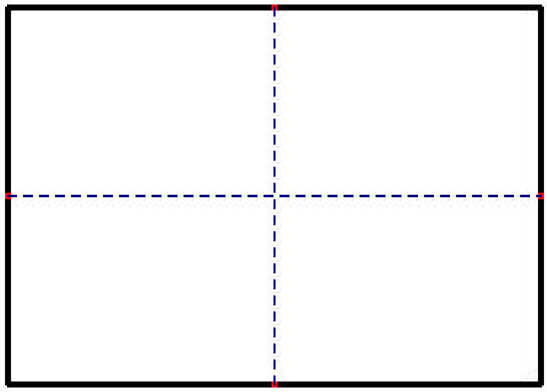


Cal aconseguir primer el quadrat *PQRS*, dividir-lo per la meitat per *m* i doblegar per *S* el costat *PS* fins que *P* toqui *m* a *T*. *STR* és, evidentment, un triangle equilàter.

Tampoc resulta gens difícil **l'hexàgon regular**. Prèviament, però, es necessita el que els papiroflexòfils denominen una base, en aquest cas un full de format $\sqrt{3}$. A continuació s'exposa la manera de construir-lo:

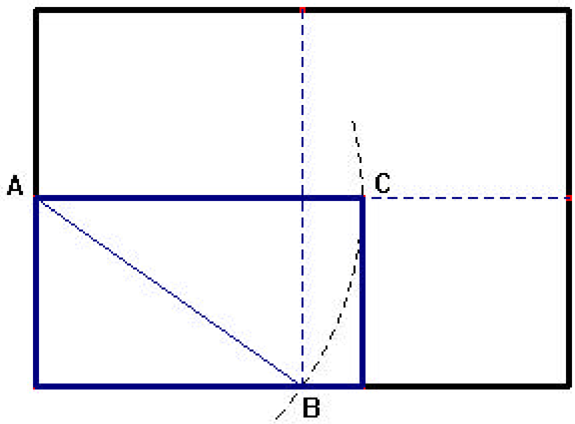
1) És convenient començar amb un DIN A3, perquè si no quedarà un hexàgon massa petit.

2) S'ha de dividir el full en quatre parts doblegant-lo (sense trencar-lo).

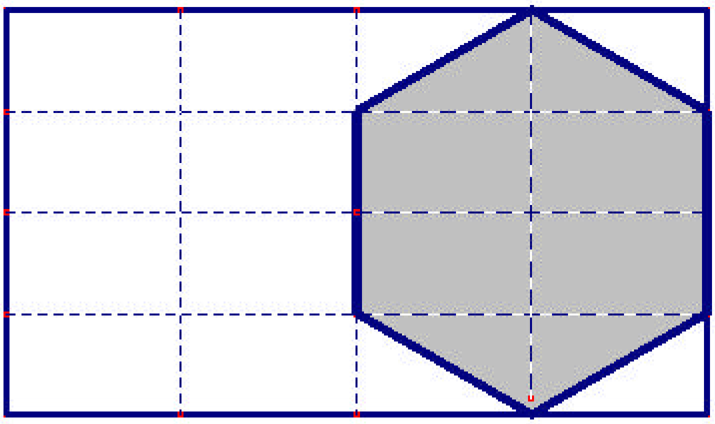


Ara, cada un dels rectangles és un DIN A5. Si es pren com a unitat el costat petit d'un d'aquests rectangles, llavors el costat gran amida $\sqrt{2}$.

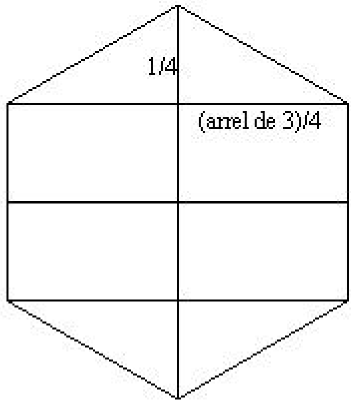
3) Després es doblega per *AB* i es porta aquesta longitud sobre el plec central per obtenir *AC*. El nou rectangle és la "base" desitjada, ja que, com abans s'ha vist, aplicant el teorema de Pitàgores, la seva longitud és $\sqrt{3}$.



4) Es retalla aquesta base i es divideix en 16 rectangles doblegant després com es veu aquí a sota:



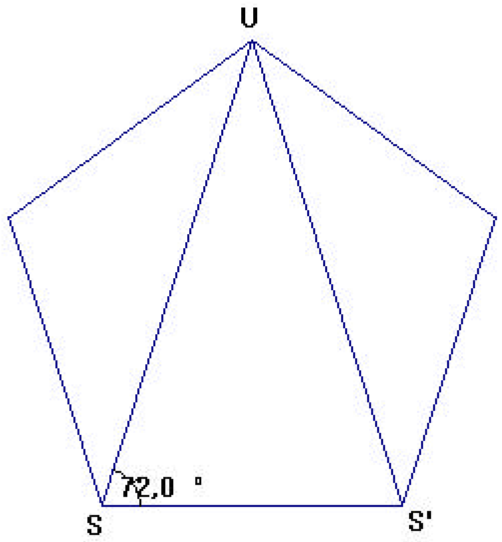
L'hexàgon ombrejat és regular. Efectivament: de la manera que s'ha pres la unitat, les dimensions de cada un dels petits rectangles són:



i per les longituds dels costats de l'hexàgon es té: verticals $=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ i inclinats = (aplicant Pitàgores) $=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{1}{2}$ i, per tant, l'hexàgon és regular.

Així com el paper de format $\sqrt{3}$ s'adiu amb la construcció d'un hexàgon regular, el format auri és especialment adequat per construir el **pentàgon regular** (ja s'ha explicat abans (Ap. 2) com construir aquest format a partir d'un quadrat). La construcció del pentàgon parteix, doncs, del format auri com a base. S'ha d'advertir, però, que aquesta construcció és bastant complexa tant des del punt de vista matemàtic com des del punt de vista de manipulació del paper (alguns doblecs costen de fer). És recomanable començar amb un paper bastant gran per minimitzar les dificultats de manipulació.

La construcció es basa en el fet que el cosinus de 72° és $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Es tracta de construir el triangle *SUS'* de la figura següent:



Vegeu la figura següent (Fig. 14).

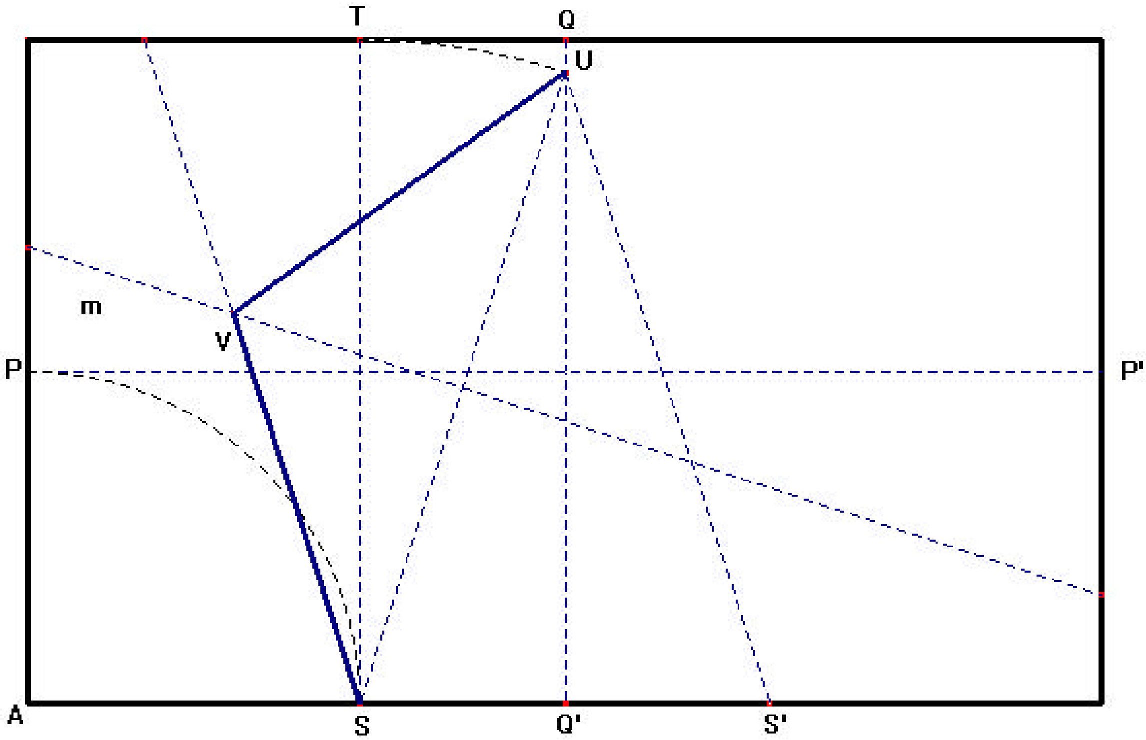


Fig. 14

Es comença dividint l'FFA en quatre parts per *PP'* i *QQ'*. Cal doblegar pel vèrtex *A* i portar el punt *P* sobre la base per obtenir el punt *S*. Aleshores, doblegant per *QQ'* s'obté el simètric *S'*. Cal observar que $SQ' = AQ' - AP = \frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Si es doblega ara per *S* perpendicularment a la base, s'obté *T*. Doblegant novament per *S*, es porta *T* sobre *QQ'* per obtenir *U*. Cal adonar-se que *SU* = 1 i, per tant, $\cos(\widehat{USQ'}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ i $\widehat{USQ'} = 72°$. A continuació, es fa coincidir *S* amb *U* per obtenir el doblec *m*. Finalment, cal doblegar per *US* per portar *US'* a *UV*. Els *U*, *V* i *S* són els vèrtexs d'un pentàgon regular. Els altres s'obtenen per simetria axial respecte de *QQ'*.

S'havia deixat per al final la demostració que "es pot doblegar per la diagonal un DIN sense doblegar-lo" (apartat 3). Cal considerar la Fig. 15.

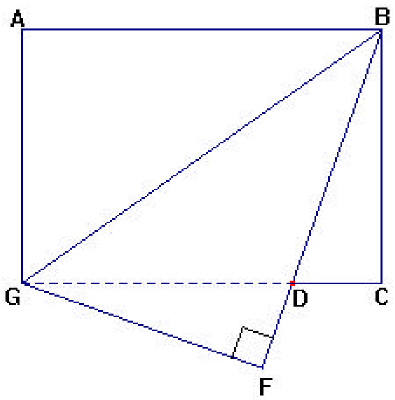


Fig. 15

Els triangles rectangles DFG i BCD són iguals perquè tenen els angles iguals i un catet igual ($GF = BC = 1$), per tant, $GD = BD = x$ i $CD = \sqrt{2} - x$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle BCD s'obté:

$x^2 = 1 + (\sqrt{2} - x)^2 = 3 - 2\sqrt{2}\,x + x^2$ que dóna $2\sqrt{2}\,x = 3$ i, per tant, $x = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

Finalment, $CD = \sqrt{2} - x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Bibliografia

[1] *Enciclopedia Espasa.* Madrid: Espasa-Calpe S.A., 1980.
[2] HUNTLEY, H. E. *The divine proportion.* New York: Dover Publications, 1970.
[3] WARUSFEL, A. *Les nombres et leurs mystères.* París: Édition du Seuil, 1961.
[4] YAGLOM, I. M. i GOLOVINA L. I. *La inducción en geometría.* México: Limusa-Wiley, 1972.

BIBLIOGRAFIA

AGNEW, J. *Exploration in number theory*. Monterrey: Wadsworth, 1972.

ABBOT, P. *Geometría*. Madrid: Pirámide. (Colección Aprende tú solo).

ALSINA, C.; BURGUÉS, C.; FORTUNY, J. M. *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Síntesis, 1990 (col·lecció Cultura y aprendizaje núm.12).

ALSINA, C.; BURGUÉS, C.; FORTUNY, J.M. *Materiales para construir la geometria*. Madrid: Síntesis, 1990 (col·lecció Cultura y aprendizaje núm.11).

ALSINA, C.; GARCIA, J. L.; JACAS, J. *Temes clau de Geometria*. Barcelona: Edicions de la UPC, 1992.

ALSINA, C.; PÉREZ, R. i RUÍZ, C. *Simetría dinámica*. Madrid: Síntesis, 1991 (col·lecció Cultura y aprendizaje núm.13).

ARGÜELLES, J. *Historia de la matemática.* Madrid: Akal, 1989.

ARTIN, E. *Teoria de Galois.* Barcelona: Vicens-Vives, 1970.

BOLD, B. *Famous problems of geometry and how to solve them.*New York: Dover Publications Inc., 1982.

BOLT, B.; HOBBS, D. *101 proyectos matemáticos.* Barcelona: Labor, 1991.

BOLT, B. "¿Qué es la geometría?". *Suma, revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*, nº 19, (novembre de 1998): pàgines 5-16.

CAPPONI, B.; LABORDE, C. *Cabri-Classe*. Argenteuil: Editions Archimède, 1995.

CASTELNUOVO, E. *Didáctica de la matemática moderna.* Barcelona: Trillas, 1993.

CASTELNUOVO, E. *La Geometría.* Barcelona: Ketres, 1981.

CHEVALLARD,Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. *Estudiar matemáticas.* Barcelona: Horsoi, 1997.

CODINA,R.[et al.]. *Fer matemàtiques*. Barcelona U. B./ U. A. B./ E. U. V., 1992.

COEXETER, H. S. M. ; GREITZER, S. *Retorno a la Geometría.* Madrid: DLS-Euler Editores, 1993.

COLL, C. [et al.]. *Marc curricular per a l'ensenyament obligatori.* Barcelona: Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament, 1986.

COLLETE, J.P. *Historia de las matemáticas.* Barcelona: Siglo XXI, 1985 (2 vol.).

CORBALÁN, F. *La matemática aplicada a la vida cotidiana*. Barcelona: Graó, 1995.

Competències bàsiques ESO. Primer cicle. Proves d'avaluació. Síntesi de resultats. Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament, 2003.

Competències bàsiques ESO. Primer cicle. Proves d'avaluació. Síntesi de resultats. Resum de premsa. Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament, 2003.

Congrés de competències bàsiques (Barcelona 26 i 27 de juny de 2003). Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu. Barcelona: Departament d'Ensenyament, CD-rom del 2003.

Currículum. Educació Secundària Obligatòria. Àrea de matemàtiques. Barcelona: Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament, 1993.

DE GUZMÁN, M. *Aventuras matemáticas.* Barcelona: Labor, 1988.

DE GUZMÁN, M. *Para pensar mejor.* Barcelona: Labor,1991.

Debat sobre el sistema educatiu català. Conclusions i propostes. Conferència nacional d'educació. Barcelona: Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament, 2002.

Disseny Curricular. Ensenyament Secundari Obligatori. Barcelona: Generalitat de Catalunya. Departament d'Enseyament, 1989.

DUNHAM, W. *El universo de las matemáticas.* Madrid: Pirámide,1995.

Enciclopedia de las matemáticas. 9 vol. Moscú-Madrid: MIR-Rubiños, 1993.

Evaluación de la educación secundaria obligatoria 2000. Resumen informativo. Instituto Nacional de Calidad y Evaluación. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia, 2000.

FERNÁNDEZ, M. [et al.]. *Circulando por el círculo.* Madrid: Síntesis, 1991 (col·lecció Cultura y aprendizaje núm.18).

FISHER, R.; VINCE, A. *Investigando las matemáticas.* Madrid: Akal, 1990.

GARDNER, M. *Carnaval matemático.* Barcelona: Alianza Editorial, 1984.
GAUSS, C.F. *Disquisitiones Arithmeticae*. Barcelona: edicions de la Societat Catalana de Matemàtiques, 1996 (traducció de l'original de 1801 de Griselda Pascual).
GHYKA, M. C. *Filosofía y mística del número.* Barcelona: Ediciones Apóstrofe, 1998.
GHYKA, M. C. *El número de oro.* Barcelona*:* Poseidón, 1992.
GORGORIÓ, N. [et al.]. *Matemátcas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Barcelona: Graó & I. C. E. Universitat de Barcelona, 1995.
GUILLÉN, G. *Poliedros*. Madrid: Síntesis, 1990 (col·lecció Cultura y aprendizaje núm.15).
GRUP ZERO BARCELONA. *Retrobem el món de la geometria: Geometria elemental I.* Barcelona: I. C. E. UAB, 1983.
GRUP ALMOSTA. *Més de 7 materials per a l'aprenentatge de la matemàtica.* Barcelona: Edicions Rosa Sensat, 1988.
HONSBERGER, R. *El ingenio en las matemáticas.* Madrid: Col·lecció La Tortuga de Aquiles, 1994.
Identificació de les competències bàsiques en l'ensenyament obligatori. Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu. Barcelona: Departament d'Ensenyament, CD-rom del 2001.
Informe Cockroft. Las matemáticas sí cuentan. Madrid, MEC, 1985.
IRSAE PIEMONT. *Matemàtiques. Actualització científica.* Barcelona: Eumo,1993.
L'Ensenyament Secundari Obligatori i el Batxillerat en la nova proposta educativa. Barcelona: Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament. Direcció General d'Ordenació i Innovació Educativa, 1991.
LELONG, J.; ARNAUDIÈS, J. M. *Geometría y cinemática.* Barcelona: Reverté, 1982.
LÓPEZ, J.A. "Diagnóstico general del sistema educativo. Resultados en matemáticas". *Suma, revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*, nº 29 (novembre de 1998): pàgines 17-28.
LÓPEZ, J.A. i MORENO M. "Tercer estudio internacional de matemáticas y ciencias". *Suma, revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*, nº 27 (febrer de 1998): pàgines 39-47.
MARTINON, A. *Las matemáticas del siglo XXI. Una mirada en 101 artículos.* Madrid: Nívola Ediciones, 2000.
MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, R. *Pensar matemáticamente.* Barcelona*:* Labor-MEC, 1992.
NEWMAN, J. R. *SIGMA. El mundo de las matemáticas.* Barcelona: Grijalbo, 1985 (7 volums).
PAULOS, J.A. *El hombre anumérico.* Barcelona: Tusquets Editores, 2000.
PLA, J. *Las matemáticas.* Barcelona: Montesinos, 1984.
POLYA, G. *¿Cómo plantear y resolver problemas?* México: Trillas 1981.
POLYA, G. *La découverte des mathématiques.* París: Dunod, 1967.
POLYA, G. *Matemáticas y razonamiento plausible.* Madrid: Tecnos. Colección Estructura y Función, 1966.
POLYA, G. *Métodos matemáticos de la ciencia.* Madrid: Col·lecció La Tortuga de Aquiles, 1994.
Resultats dels estudis Projecte PISA i Educació Secundària Obligatòria. Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu. Barcelona: Generalitat de Catalunya, Departament d'Ensenyament, 2002.
Resum de l'informe sobre els coneixements matemàtics dels alumnes de 16 anys. Àrea de matemàtiques de la Inspecció. Barcelona: Departament d'Ensenyament, 1998.
Síntesi de resultats de les proves d'avaluació de competències bàsiques al cicle mitjà d'educació primària. Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament, 2002.
RÍBNIKOV, K. *Historia de las matemáticas.* Moscú: Mir, 1974 (traducció espanyola 1987).
RODRÍGUEZ, R.; RODRÍGUEZ M. C. *Cuentos y cuentas de los matemáticos.* Barcelona: Reverté, 1987.
SINGH, S. *L'enigma de Fermat.* Barcelona: Edicions 62, 1998.

ÍNDEX GENERAL

Pàg.